معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

المركز الجامعي افلو

أساسيات بحوث العمليات

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية

-الطور الأول-

تخصص مالية ومحاسبة

د. جخيوة طاهر

***********2025/2024****************

أهداف التعليم

تهدف هذا المادة التعليمية إلى تزويد الطالب ببعض التقنيات الإرشادية التي تستخدمها بحوث العمليات (البرمجة الخطية) لحل المشكلات بالمؤسسة. اضافة إلى التمكن من تحقيق أهداف المؤسسة باستخدام نماذج البرمجة الخطية المختلفة.

المعارف المسبقة المطلوبة

حتى يتمكن الطالب من دراسة محتوى هذه المادة لابد أن يكون متحكما في مادة الرياضيات خاصة الجبر الخطي والمصفوفات.

محتوى المادة:

- مدخل عام حول بحوث العمليات
- البرمجة الخطية: الصيغة القياسية
- البرمجة الخطية: الطريقة البيانية
- البرمجة الخطية: طريقة السمبلكس
- البرمجة الخطية: النموذج المقابل
- برمجة الأعداد الصحيحة: مشاكل النقل

تعريف بحوث العمليات

1. تعتبر بحوث العمليات مدخل كمي يهدف الى تقديم الحلول للمشكلة القائمة من خلال استخدام النماذج الرياضية والاحصائية والتحليل الكمي في ظل القيود والأهداف المحددة.
2. جوهر بحوث العمليات هو البحث عن أمثلية تيسير الموارد المادية والبشرية في مختلف المؤسسات في ظل ظروف معينة وكمية محدودة.
3. ان علم بحوث العمليات هو عبارة عن مجموعات من الطرق والوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الاستخدام الافضل للموارد المتاحة.
4. قراءة لهذه التعاريف:

ا- علم متعدد التخصصات: هو مزيج من العلوم بين الرياضيات والاحصاء وعلم الحاسوب والاقتصاد ...

ب- تحليل المشكلات المعقدة والتي لها أبعاد متعددة وعوامل متداخلة

ج- بناء نماذج رياضية: يتم صياغة المشكلة على شكل معادلة أو متباينات رياضية .

ج- تساعد في عملية اتخاذ القرار: بعد تحديد المشكلة وصياغتها على شكل معادلات ومتراجحات يتجلى امام متخذ القرار مجموعة من الحلول وله الحرية في اختيار الكل المناسب من بين:

- الحل الممكن
- الأفضل
- الأمثل

هـ- تهدف إلى اتخاذ الحل الامثل الذي يوازن بين الأهداف (مثل زيادة الارباح وتحسين الأداء) والقيود المفروضة مثل (الموارد المحدودة أو القيود الزمنية).

بعض الاساليب الكمية في بحوث العمليات:

- البرمجيات الخطية:
  - البيانية
  - Simplex
- التحليل الشبكي
  - Pertchart
  - Ganttchart
- تحليل نقطة التعادل
- نماذج النقل
- سلاسل ماركوف
- محاكات

البرمجة الخطية

هي من بين الأساليب الكمية المستخدمة في بحوث العمليات والتي تساعد في اتخاذ القرارات.

مستلزماتها

1. تحديد دالة الهدف: Objective Function

ضرورة وجود هدف واضح يسعى متخذ القرار على تحقيقه ويمكن أن يأخذ اتجاهين:

الأول تعظيم العوائد Max

الثاني تقليل التكاليف Min

ويتم التعبير عنه في صورة دالة خطية والحصول على قيمة رقمية.

وتتكون دالة الهدف من متغيرات $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$

وتتكون كذلك من معاملات.

بالنسبة للمعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعطي دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة من تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف

شرح عناصر دالة الهدف:

- Max: تعني تعظيم ومفادها جعل دالة الدالة Z في اعظم قيمة لها.
- Min: تعني تدنية ومفادها جعل دالة الدالة Zفي ادنى قيمة لها.

$$Min\ Z /\ Max\ Z = C_1X_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n$$

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$: هي متغيرات البرنامج والمطلوب البحث عن قيمتها، ويشترط أن تكون غير سالبة.

$C_1, C_2, \ldots C_n$: معاملات الدالة المراد تعظيمها أو تدنيتها شرط احترام القيود ويمكن أن تأخذ أي قيمة.

2. القيود: يمكن تعريفها كما يلي :

- إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والامكانيات المتاحة.
- صياغة العلاقة بين المتغيرات وفق شروط رياضة.
- توضيح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة و المحدودة بشكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط منها تسمي بالهيكلية .
- شرط عدم السلبية: أي لكل الذي يقدمه النموذج يجب أن يكون ذات قيمة موجبة ويعبر عنها X_1, X_2, X_3

أمثلة عن دالة الهدف

1- الحالة رقم 1 تعظيم الارباح Max

- مثال 01

مؤسسه إنتاجية تنتج ثلاثة أنواع من المنتوجات X_1, X_2, X_3 وتحقق أرباح قدرها 4 عن المنتوج الأول 3 على المتنوع 2 و17 على المنتوج الثالث.

ماهي دالة الهدف في حالة تعطي الأرباح

الحل:

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2 + 17X_3$$

الي البحث عن عدد الوحدات التي يجب إنتاجها لتحقيق أقصى ربح.

- **مثال 02**

نفترض مؤسسة تنتج منتوجين X_1, X_2

المنتوج X_1 يحقق ربح قدره 15 والمنتوج الثاني يحقق ربح قدره 10

ماهي دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح؟

$$Max\ Z = 15X_1\ + 10X_2$$

- **مثال 03**

ينتج مصنع نوعين من السيارات (سياحية، نفعية)

ويحقق ارباح قدرها 100 عن السيارات السياحية و350 عن السيارات النفعية.

المطلوب تحديد دالة الهدف في حالة تعظيم الأرباح Max

$$Max\ Z = 100X_1\ + 350X_2$$

الحالة الثانية تدنية التكاليفMin

مثال 01

مؤسسة إنتاجية تنتج ثلاثة أنواع من المنتوجات X_1, X_2, X_3 بتكلفة إنتاج 5 – 4 – 7 لكل منتج وعلى التوالي المطلوب إيجاد دالة الهدف مع العلم أن المؤسسة تطمح إلى تحقيق الانتاج بأقل تكلفة.

$$Min\ Z = 5X_1\ + 4X_2\ + 7X_3$$

مثال 02

ينتج مصنع نوعين من السيارات (السياحية والنفعية) سعر البيع 350 دج – 400 دج على التوالي بهامش ربح قدره 100 دج لكل سيارة.

المطلوب

ماهي دالة الهدف في حالة تعطي الأرباح Max وفي حالة تدنية التكاليف Min

الحل: لدينا في حالة الهدف تعظيم الارباح Max نبحث عم ربح الوحدة الواحدة وهي 100 لكل سيارة.

إذن دالة الهدف للنموذج الأول هو

$$Max\ Z = 100X_1\ + 100X_2$$

X_1: سيارة سياحية

X_2: سيارة نفعية

دالة الهدف للنموذج الثاني هو تدنية التكاليف Min Z

نبحث عن تكلفة الوحدة الواحدة لكل سيارة

سعر البيع = تكلفة + هامش الربح

=> تكلفة = ثمن البيع – هامش الربح

ك$_1$ = 350 – 100 = 250

ك$_2$ = 400 – 100 = 300

اذن دالة الهدف في حالة تدنية التكاليف Min Z هي:

$$Min\ Z = 250X_1\ + 300X_2$$

مثال 03

لدينا مؤسسة تنتج أربعة أنواع من المنتوجات الاستهلاكية كما أن الأرباح المحققة هي 2 – 4 – 3 – 7 على التوالي كما أن تكلة الإنتاج هي 1 – 2 – 1 - 2 على التوالي:

ماهي دالة الهدف التي تحقق أقل تكلفة؟

الحل:

$$Min\, Z = X_1 + 2\, X_2 + X_3 + 2X_4$$

امثلة عن القيود

مؤسسة تنتج نوعين من الهواتف النقالة (هواتف ذكية هواتف تقليدية) مع العلم أن الموارد المتاحة والمستخدمة في صنع الهواتف قدرها 400 دج

وساعات العمل 240 ساعة شهريا

يحتاج كل هاتف ذكي إلى 1.5 من الموارد (المواد الأولية) وساعة عمل واحدة.

يحتاج كل هاتف تقليدي إلى 0.25 من الموارد (المواد الأولية) و1/8 ساعة عمل.

وكان الربح المتوقع عن بيع هاتف ذكي هو 20 وحدة نقدية و2حدات نقدية بالنسبة للهاتف التقليدي.

المطلوب

ماهو نمودج البرمجة الخطية لحقيق أقصى ربح.

لدينا:

الهواتف الذكية X_1

الهواتف التقليدية X_2

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 20X_1 + 2X_2$$

القيود:

قيد الموارد:

$$1.5X_1 + 0.25X_2 \leq 400$$

قيد ساعات العمل:

$$X_1 + 1/8X_2 \leq 240$$

$$X_1\, X_2 \geq 0$$

مثال: 02

تقوم مؤسسة بإنتاج نوعين من السلع والجدول التالي يوضح عدد البيانات عن العملية الانتاجية.

الموارد المتاحة	السلعة الثانية	السلعة الأولى	الموارد الأولية
200	2	2	I
50	5	4	II
30	1	3	III
	7	10	هامش الربح للوحدة الواحدة

المطلوب:

إيجاد نمودج البرمجة الخطية من أجل تحقيق أقصى ربح.

الحل:

السلعة الأولى: X_1

السلعة الأولى: X_2

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 10X_1 + 7X_2$$

القيود

Subject to Constraints

$$2X_1 + 2X_2 \leq 200$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 50$$

$$3X_1 + X_2 \leq 30$$

$$X_1\ X_2 \geq 0$$

مثال03 :

تنتج مؤسسة مجموعة من السلع والبيانات التالية توضح العملية الإنتاجية:

الموارد المتاحة	السلعة الثالثة	السلعة الثانية	السلعة الأولى	الموارد الأولية والوقت
130	5	3	1	I
30	-	-	2	II
360	7	4	2	ساعات العمل
	11	14	20	هامش الربح للوحدة الواحدة

المطلوب:

إيجاد نمودج البرمجة الخطية من أجل أقصى ربح.

الحل:

$$Max\ Z = 20X_1 + 14X_2 + 11X_3$$

Subject to Constraints

$$X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 130$$

$$X_2 \leq 30$$

$$2X_1 + 4X_2 + 7X_3 \leq 360$$

$$X_1\, X_2\, X_3 \geq 0$$

مثال04 :

تنتج مؤسسة نوعين من السلع(منتوج تام الصنع ومنتوج نصف الصنع)

بالنسبة المنتوج الأول يمر بالمراحل التالية:

3 ساعات عمل في الورشة 1

4 ساعات عمل في الورشة 2

12 ساعة عمل في الورشة 3

أما المنتج نصف مصنع يمر بالمراحل التالية:

2 ساعات عمل في الورشة 1

تكلفة انتاج الوحدة الواحدة 4 وحدات نقدية ... للمنتج الأول

تكلفة انتاج الوحدة الواحدة 9 وحدات نقدية ... للمنتج الثاني

الوقت المتاح للقسم الأول هو 210 ساعة

الوقت المتاح للقسم الثاني هو 300 ساعة

الوقت المتاح للقسم الثالث هو 20 ساعة

المطلوب:

إيجاد نموذج البرمجية الخطية من أجل تحقيق أقل تكلفة

الحل

الورشات	A(X_1)	B(X_2)	الوقت المتاح
I	3	1	210
II	4	0	300
III	12	0	20
هامش الربح	4	9	

دالة الهدف:

$$Min\, Z = 4X_1 + 9X_2$$

Subject to Constraints

$$3X_1 + X_2 \leq 210$$

$$4X_1 \leq 300$$

$$12X_1 \leq 20$$

شرط عدم السالبية

$$X_1\, X_2\, X_3 \geq 0$$

مثال 05

تنتج مؤسسة ثلاث منتوجات مستعملة في ذلك المواد الأولية الخام

كما أن المؤسسة تسعى الى تقليل تكاليف الإنتاج مع ضمان تلبية الطلب

المعطيات:

تكلفة الانتاج لكل وحدة 3، 5 ،1 على التوالي.

ساعات العمل 360 ، 40 ، 120 على التوالي.

مواد أوليةA: 20 ، 4 ، 5 على التوالي.

مواد أولية - B: 15 ، 5 ، 15 على التوالي.

المواد المتاحة:

ساعات العمل المتاحة 400 ساعة.

مواد أولية محدودة A: 300

مواد أولية محدودة B: 250

المطلوب: ايجاد نموذج البرمجة الخطية من أجل حقيق أدنى تكلفة

الحل:

الموارد	منتوج 1 X1	منتوج X2	منتوج 3 X3	المواد المتاحة
ساعات عمل	360	40	12	400
مواد أولية A	20	4	5	300
مواد أولية B	15	5	15	250
تكلفة الوحدة	3	5	1	

دالة الهدف:

$$Min\ Z = 3\ X1 + 5\ X2 + X3$$

Subject to Constraints

$$360\ X1 + 40\ X2 + 12\ X3 \le 400$$

$$20\ X1 + 4\ X2 + 5\ X3 \le 300$$

$$15\ X1 + 5\ X2 + X3 \ge 250$$

$$X1\ ,\ X2\ ,\ X3 \ge 0$$

مثال06 البرمجة الخطية لتدنية التكلف

شركة صناعية تنتج أربع منتجات (A-B-C-D)

ترغب الشركة في تقليل التكاليف وفق القيود التالية

عدد ساعات العمل المتاحة في قسم الانتاج 360 ساعة كحد أقصى

عدد المواد الأولية محصورة ما بين [70-170]

المنتج "A" يحتاج نصف ساعة عمل و0.10 وحدة من المواد الخام لكل وحدة

المنتج "B" يحتاج 4 ساعات من عمل و10 وحدات من المواد الخام لكل وحدة

المنتج "C" يحتاج 3.5 ساعة عمل و07 وحدات من المواد الخام لكل وحدة

المنتج "D" يحتاج 1.5 ساعة عمل و3 وحدات من المواد الخام لكل وحدة

تكلفة إنتاج وحدة واحدة من المنتوجات D, C, B, A هي 5-3-4-1.5 على التوالي

المطلوب :

إيجاد نموذج البرمجة الخطية من أجل تحقيق أدنى تكلفة

الحل:

المنتوجات / الموارد	A/X_1	B/X_2	C/X_3	D/X_4	الموارد المتاحة
ساعات العمل	2/1	4	3.5	1.5	360
مواد أولية	0.10	10	07	3	[70.170]
تكلفة الوحدة	5	3	4	1.5	

نموذج البرمجة الخطية من أجل تدنية التكاليف:

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 1.5X_4$$

Subject to Constraints

$$\tfrac{1}{2}X_1 + 4X_2 + 3.5X_3 + 1.5X_4 \leq 360$$

$$0.10X_1 + 10X_2 + 7X_3 + 3X_4 \geq 70$$

$$0.10X_1 + 10X_2 + 7X_3 + 3X_4 \leq 170$$

شرط عدم السالبية

$$X_1 . X_2 . X_3 . X_4 \geq 0$$

بما أن دالة الهدف هي تدنية التكاليف Mim فإن القيود يجب أن تأخذ اشارة أكبر من او تساوي وعليه بجب ضرب القيد الأول والآخر في (-1) من أجل تغيير شكل المتباينة من ≥ إلى≤

وعليه يتغير النموذج الأخير الى ما يلي:

دالة الهدف:

$$Min\ Z = 5\ X_1 +3\ X_2 + 4\ X_3 +1.5\ X_4$$

Subject to Constraints :

$$-\tfrac{1}{2}\ X_1 -4\ X_2 - 3.5\ X_3 -1.5\ X_4 \le -360$$

$$+0.10\ X_1 +10\ X_2 + 7\ X_3 +3\ X_4 \le 70$$

$$-0.10\ X_1 -10\ X_2 - X_3 -3\ X_4 \le -170$$

$$X_1 - X_2 - X_3 - X_4 \geq 0$$

مثال (حافظة الاستثمار)

لدى أحد الأشخاص مبلغ من المال مقداره (100000) دينار ويرغب باستثماره في السوق المالي بالكامل وفق شروط معينة. فإذا علمت أن مجالات الاستثمار المتاحة والعائد السنوي المتوقع لكل منها والشروط موضحة في أدناه،

المطلوب: صياغة المسألة بشكل برمجة خطية تهدف الى تعظيم ربح هذا المستثمر.

مجال الاستثمار	العائد السنوي المتوقع
أسهم مصرف السلام	%7
أسهم الشركة العقارية	%5
أسهم الشركة الصناعية	%6
أسهم شركة النقل	%4
أسهم مكتب الاستثمار العالمي	%7

الشروط:

أن لا يقل المبلغ المستثمر في مصرف السلام عن 20% من المبلغ الكلي.

أن لا يزيد المبلغ المستثمر في الشركة العقارية عن 30000 دينار

أن يستثمر 25000 دينار في الشركة الصناعية.

أن يكون مجموع ما يستثمر في شركة النقل ومكتب الاستثمار 15% من المبلغ الكلي.

الحل:

نفرض أن المبلغ المخصص للاستثمار في المجالات المختلفة كما يلي:

المبلغ المخصص للاستثمار في مصرف السلام= X_1

المبلغ المخصص للاستثمار في الشركة العقارية=X_2

المبلغ المخصص للاستثمار في الشركة الصناعية=X_3

المبلغ المخصص للاستثمار في شركة النقل=X_4

المبلغ المخصص للاستثمار في مكتب الاستثمارX_5

دالة الهدف

$$Max.\ Z = 0.07X_{1} + 0.05\ X_2 + 0.06X_3 + 0.04X_4 + 0.07X_5$$

القيود

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 100000$

$X_1 \geq 20000 \quad (100000*20/100)$

$X_2 \leq 30000$

$X_3 = 25000$

$X_4 + X_5 = 15000\ (100000*15/100)$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

مثال: مشكلة النقل

ترغب إحدى الشركات بإعداد خطة النقل اللازمة لنقل منتجاتها من مصانعها الثلاثة إلى خمسة مستودعات خاصة بمشاريع يجري تنفيذها تملكها، وذلك لتسهيل عملية التوزيع في الأسواق المختلفة. والجدول التالي يوضح البيانات الخاصة بتكلفة نقل الطن الواحد **من كل مصنع إلى كل مستودع والكميات المتاحة في كل مصنع واحتياجات كل مستودع.**

المطلوب: صياغة الحالة بشكل مسألة برمجة خطية بحيث تكون التكلفة أدنى ما يمكن (تكلفة النقل للوحدة النقدية).

المستودع / المصنع	المشروع 01	المشروع 02	المشروع 03	المشروع 04	المشروع 05	طاقة المصنع (طن)
مصنع 1	4	6	5	12	19	180
مصنع 02	10	4	8	5	12	280
مصنع 03	13	9	3	6	10	150
الاحتياجات (طن)	120	100	160	80	150	

الحل:

نفترض أن الكميات المشحونة من المصنع 1 إلى المستودع 1 هي: X_1 =1

وهكذا بالنسبة لباقي الكميات من إلى....... X35

دالة الهدف

$$Min.\ Z = 4X_{11} + 6X_{12} + 5X_{13} + 12X_{14} + 19X_{15}$$

$$+10X21 + 4X22 + 8X23 + 5X24 + 12X25$$

$$+ 13X_{31} + 9X_{32} + 3X_{33} + 6X_{34} + 10X_{35}$$

القيود:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 180$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 280$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 150$$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 120$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 100$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 160$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 80$

$X_{15} + X_{25} + X_{35} = 150$

$X_{11}\ X_{12}\ \ldots,\ X_{35} \geq 0$

التشكيلة المثلى من العاملين

يتم فحص المنتجات الصناعية في إحدى المنشآت من قبل نوعين من المفتشين A وB.

(التصنيف على أساس الكفاءة في الفحص).

على أن يتم فحص ما لا يقل عن 1500 وحدة من المنتجات يوميا (8 ساعات عمل /يوم)

المفتش A يستطيع فحص 20 قطعة في الساعة وبدقة 96%، بينما المفتش B يستطيع فحص 14 قطعة وبدقة 92%

إن الأجور المدفوعة لكلا النوعين هي 5وحدات للساعة للمفتش A و 4 للمفتش B .

كما أن عدد المفتشين الموجودين في المنشأة هو 10 من النوع A و 15 من النوع B.

والمطلوب: تخصيص العدد الأمثل من المفتشين لإنجاز هدف المهمة، وذلك بصياغة المسألة في شكل برمجة خطية.

الحل:

القرار هنا هو تحديد العدد الأمثل من المفتشين من كلا النوعين A وB.

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع A هو= X_1

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع B هو= X_2

إن الهدف سيكون تقليل الكلفة الكلية للمفتشين، علمًا بأن الكلفة المرتبطة بكل نوع منهم ستكون كالتالي:

تكلفة الساعة الواحدة للمفتش من نوعA =5+(3*0.04*20)

=7.40m.u

تكلفة الساعة الواحدة للمفتش من نوعB = 4+(3*0.08*14)

=7.36m.u

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 8(7.40X1 + 7.36X2)$$

$$= 59.20X_1 + 58.88X_2$$

القيود

$$X_1 \leq 10$$

$$X_2 \leq 15$$

$$(20 * 8\ X_1 + 14*8\ X_2 \geq 1500)$$

$$160\ X_1 + 112\ X_2 \geq 1500$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

نموذج البرمجة الخطية في شكله المصفوفي

دالة الهدف في حالة Max:

$$\text{Max: } Z = [C_1\ C_2\ \ldots\ldots.C_n] \times \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ \vdots \\ Xn \end{bmatrix}$$

دالة الهدف في حالة Max:

$$\text{Max: } Z = [C1\ C2\ \ldots\ldots.Cn] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix}$$

مثال : $\text{Max:} Z = 20\ X_1 + 5\ X_2$

الشكل المصفوفي لدالة الهدف:

$$\text{Max } Z = [\ 20\ \ 5] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

أما -القيود فتكتب كما يلي: Subject to Constraints

$$a1,1\ X_1 +\ a1,2\ X_2 + \ldots.. + a1,n\ Xn$$

$$\text{S/c} \begin{bmatrix} a1,1 & a1,2 & a1.3 \\ a2,1 & a2,2 & a2,3 \\ a3,1 & a3,2 & a3,3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix}$$

مثال : لدينا القيود التالية :

$$X_1 + 3\ X_2 + 5\ X_3 \le 130$$

$$2\ X_1 + 10\ X_2 + 4\ X_3 \le 100$$

$$5\ X_1 + 2\ X_2 + \ X_3 \le 9$$

أكتب القيود على الشكل المصفوفي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 130 \\ 100 \\ 9 \end{bmatrix}$$

شرط عدم السالبية

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الشكل المصفوفي لنموذج البرمجة حالة تدنية التكاليف:

دالة الهدف في حالة Min:

$$\text{Min } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots.. + C_nX_n$$

$$\text{Min } Z = [C_1C_2 \ldots\ldots C_n] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix}$$

مثال

$$\text{Max:}Z = 2\ X_1 + 3\ X_2 + 5\ X_3$$

الشكل المصفوفي للدالة الهدف

$$\text{Min } Z = [2\ \ 3\ \ 5] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix}$$

أما القيود شكلها المصفوفي هو :

$$\begin{cases} a1,1\ X_1 + a1,2\ X_2 + \dots\dots\dots + a1,n\ X_n \geq b_1 \\ a2,1\ X_1 + a2,2\ X_2 + \dots\dots\dots + a2,n\ X_n \geq b_2 \\ a3,1\ X_1 + a3,2\ X_2 + \dots\dots\dots + a3,n\ X_n \geq b_n \end{cases}$$

$$\text{S/C} \begin{bmatrix} a1{,}1 & a1{,}2 & a1.3 \\ a2{,}1 & a2{,}2 & a2{,}3 \\ a3{,}1 & a3{,}2 & a3{,}3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix}$$

مثال: أكتب القيود على الشكل المصفوفي

$$\text{S/C} \begin{cases} 2\ X_1 + 4\ X_2 + 4\ X_3 \geq 50 \\ X_1 + X_2 + 2\ X_3 \geq 10 \\ 9\ X_1 + 2\ X_2 + 3\ X_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حل نماذج البرمجة الخطية

بإستخدام الطريقة البيانية

تُعد البرمجة الخطية (Linear Programming) إحدى أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في اتخاذ القرارات المثلى في مجالات متعددة مثل الإدارة، الاقتصاد، الهندسة، واللوجستيات. وتعتمد على إيجاد القيم المثلى (الحد الأقصى أو الحد الأدنى) لدالة الهدف مع مراعاة مجموعة من القيود الخطية.

تُستخدم الطريقة البيانية (Graphical Method) لحل نماذج البرمجة الخطية ذات المتغيرين فقط، حيث يكون من السهل تمثيل القيود ورسمها في المستوى الإحداثي (ثنائي الأبعاد). وتُعد هذه الطريقة أداة بصرية فعالة لفهم الحلول المثلى، لكنها لا تُستخدم في المشكلات ذات أكثر من متغيرين .

خطوات الطريقة البيانية

تحديد دالة الهدف

تحديد القيود الخطية مع شرط عدم السلبية

تمثيل القيود بيانيًا :يتم تحويل كل قيد إلى معادلة خطية ثم تمثيله في المستوى معلم الاحداثيات.

يتم تحديد المنطقة الممكنة (Feasible Region) التي تحقق جميع القيود.

تحديد النقاط الأساسية (رؤوس المنطقة الممكنة)

تتحدد هذه النقاط من تقاطع الخطوط الممثلة للقيود.

إيجاد الحل الأمثل:

يتم حساب قيمة الدالة الهدفية عند كل نقطة رأس في المنطقة الممكنة.

النقطة التي تحقق (أعلى أو أدنى) قيمة للدالة هي الحل الأمثل.

مزايا وعيوب الطريقة البيانية

المزايا:

توفر تمثيلًا بصريًا سهل الفهم.

مناسبة للمسائل الصغيرة ذات متغيرين.

العيوب:

غير قابلة للتطبيق في المشكلات ذات أكثر من متغيرين.

قد تكون غير دقيقة إذا لم يتم تحديد النقاط الحرجة بدقة

مثال

باستخدام الرسم البياني قم بتحديد الكميات المثلى للإنتاج لكل من السلعتين بحيث يتم تحقيق أقصى ربح ممكن

دالة الهدف: $Max\ Z = 40\ X_1 + 50\ X_2$

القيود:

$$15X_1 + X_2 = 3$$

$$X_1 + 2\ X_2 = 12$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

تحويل القيود إلى معادلات:

$$15X_1 + X_2 = 3$$

$$X_1 + 2\ X_2 = 12$$

تعيين الاحداثيات لكل معادلة

المعادلة رقم (1)

$$3X_1 + X_2 = 15$$

If $X_1=0$

If $X_1=0$ ……………. $X_2=15$

(0.15)

if $X_2=0 \rightarrow X_1=5$

(5.0)

المعادلة رقم (2)

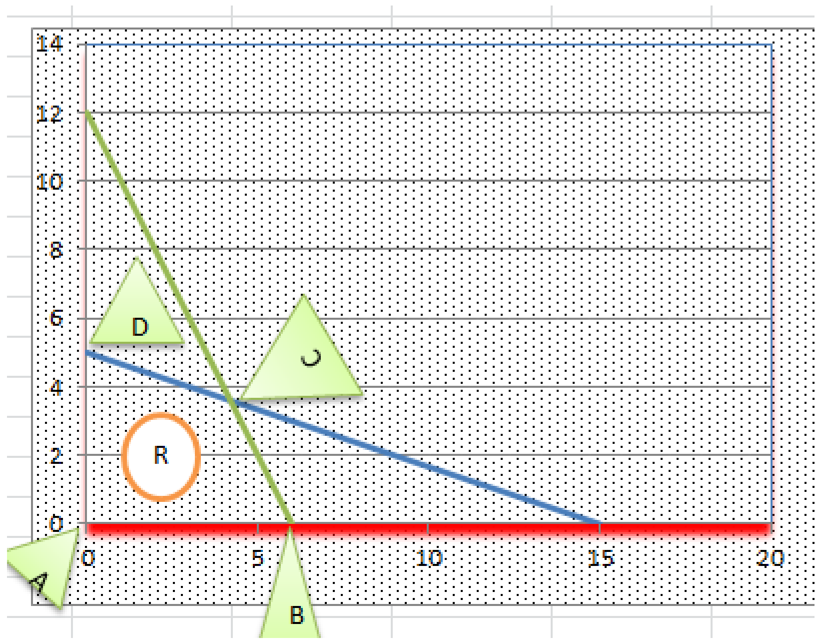
$$X_1 + 2X_2 = 12$$

If $X_1=0 \rightarrow X_2=6$

(0.6)

if $X_2=0 \rightarrow X_1=12$

(12.0)



بما أن دالة الهدف Max فان منطقة الحل الامثل تكون ما دون نقطة التقاطع والممثلة في الشكل رقم (1) بالمنطقة R تحت نقطة تقاطع المستقيمين مع النقطة C(.,.)

أي توجد مجموعات من الحلول الممكنة تقع في المنطقة

حساب إحداثية النقطة (C) بطرح المعادلة الأولى من الثانية أو العكس

بضرب المعادلة 2 في 3 وطرح المعادلة الثانية من الاولى نجد

$$3\,X_1 + X_2 = 15$$

$$3\,X_1 + 6\,X_2 = 36$$

$$5\,X_2 = 21$$

$$X_2 = 21/5 = 4.2$$

بتعويضها في احدى المعادلات $X_2 = 4.2$

$$3\,X_1 + 4.2 = 15 \rightarrow 3\,X_1 = 10.9 \geq X_1 = 3.6$$

يتم تحديد الحل الأمثل بعد تعويض كل من الحلول الأربعة في دالة الهدف كالآتي:

المنطقة	X_1	X_2	**Max $Z=40X_1+50X_2$**
A	0	0	**0**
B	5	0	**40(5)+50(0)=200**
C	3.6	4.2	**40(3.6)+50(4.2)=354***
D	0	6	**40(0) +50(6) =300**

من الجدول نجد أن النقطة c تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية الى 354

ملاحظة:

طريقة الرسم البياني لها ميزات خاصة لإيجاد الحل الأمثل:

- لأنها تعامل مع النموذج الذي به متغيرين فقط (X_1 ,X_2) لكنها تعتير بسيطة ودقيقة

- تعتمد على تحديد منطقة الحلول المقبولة

- تحدد النقاط المتطرفة التي تجعل الأرباح أعظم ما يمكن إذا كانت دالة الهدف Max والتي تجعل التكاليف أقل ما يمكن إذا كانت دالة الهدف Mim

خطوت الرسم البياني:

1-تحويل القيود من متباينات إلى معادلات.

2 - يتم تحويل المعادلات إلى رسم بياني

3- تحديد نقطة النقاط

4- تحديد نقطة الحل الأمثل والى تحقق القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف.

5- في حالة دالة الهدف Max فإن منطقة الحل الأمثل هي تبدأ من نقطة النقاطة فما دونها إلى نقطة الاصل

6-في حالة دالة الهدف Min فإن منطقة الحل الأمثل هي تبدأ من نقطة التقاطع فما فوقها أي منطقة الحل الأمثل في حالة Min فهي المنطقة البعيدة من نقطة الأصل (0,0) .

10- الحل الأمثل يقع ضمن حدود المنطقة المضللة

تمرين 2:...........

احسب قيمة دالة الهدف التي تجعل الأرباح أعظم ما يمكن

$$\text{Mam } Z = 40\ X_1 + 36\ X_2$$

$$\text{S to: } 5\ X_1 + 3X_2 \ \geq 45$$

$$X_1 \leq\ 8$$

$$X_2 \leq 10$$

Solution

$$5\ X_1 + 3\ X_2\ = 45$$

$$\text{If } X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 14/3 = 15$$

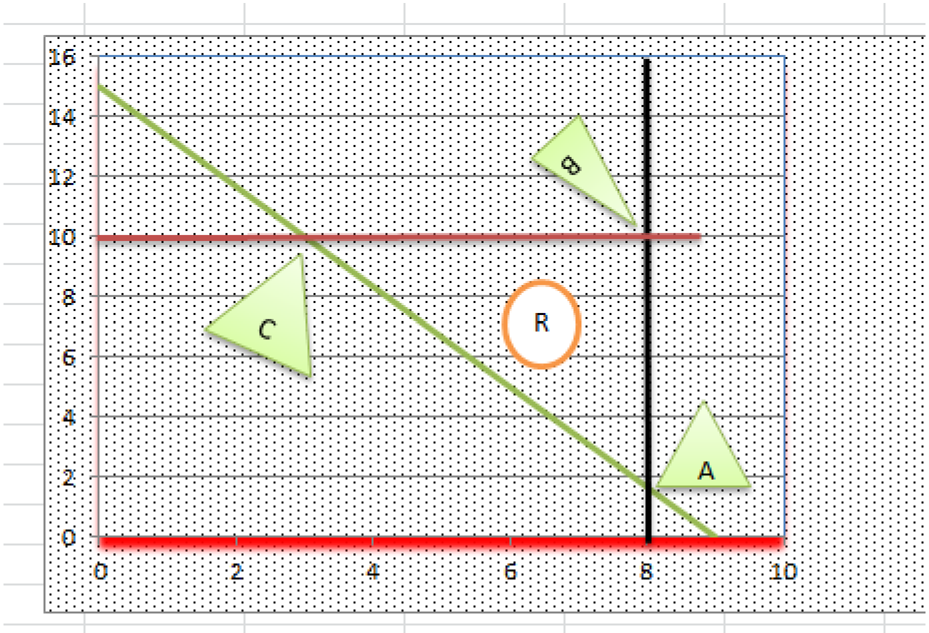
$$\text{If } X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 14/5 = 9$$

(0.15) (9.0)

2/ $X_1 = 8$ (8.0)

3/ $X_2 = 10$ (0.10)

الرسم البياني



للتعرف على نقاط التقاطع ABC نقوم بما يلي :

$$5\ X_1 + 3\ X_2 = 45 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$X_1 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

تعويض للمعادلة رقم (2) في المعادلة (1) نجد :

$$5\ (8) + 3\ X_2 = 45$$

$$40 + 3\ X_2 = 45 \rightarrow X_2 = 5/3$$

$$A(8\ ,\ 5/3)$$

النقطة C هي نقطة تقاطع المعادلتين

$$5\ X_1 + 3\ X_2 = 45 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$X_2 = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بنفس الطريقة نعوض المعادل (2) في (1)

$$5 X_1 + 3 (10) = 45$$

$$5X_1 = 15$$

$$X1=3$$

C(3,10)

النقطة B :

$$X_1 = 8$$

$$X_2=10$$

B(8.10)

نبحث عن الحل الأمثل

النقاط	دالة الهدف Max Z = 40 X1+36 X2
(8, 1.66) (8.10) (3.10	Z = 40(8) +36(1.66) = 349.76 Z = 40(8) + 36(10) = 680* Z = 40(3) + 36(10) = 480

مثال 3: اوجد حلا لمسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام الطريقة البيانية

$$\text{Min } Z = 100 X_1 +80 X_2$$

S/TO

$$6 X_1 +2 X_2 \geq 12$$

$$6 X_1 +2 X_2 \geq 8$$

$6X_1 + 2X_2 \geq 18$

$X_1, X_2 \geq 0$

Solution

1/………… $6X_1 + 2X_2 = 12$

If / $X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 6$

(0.6)

If /$X_2 = 0 \Rightarrow 6X_1 = 12 \Rightarrow X_1 = 2 \geq$ (2.0)

2 /…………... $2X_1 + 2X_2 = 8$

If /$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 4$

(0.4)

If /$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4$

(4.0)

3 / $6X_1 + 4X_2 = 18$

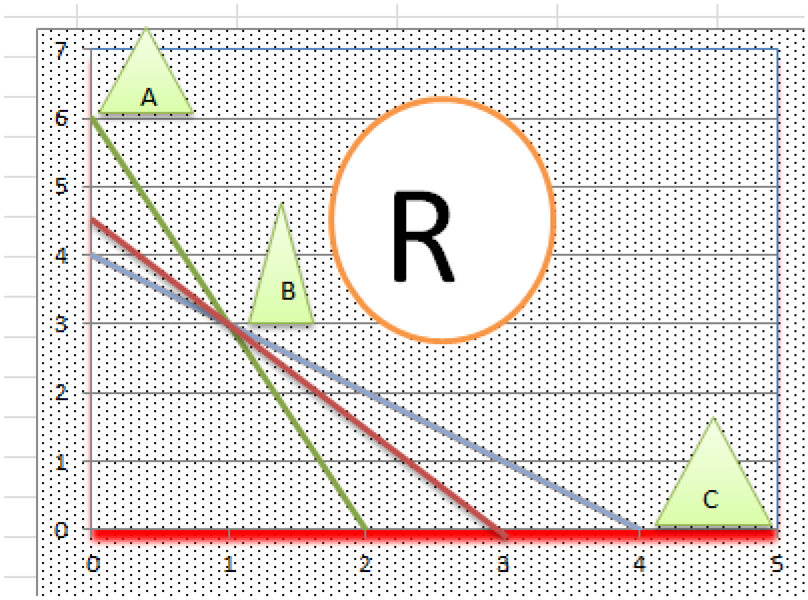
If/ $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 4,5$

(0 . 4,5)

If /$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3$

(3.0)

الرسم البياني



للتعرف على احداثية نقطة التقاطع نختار معادلتين من أصل الثلاثة ونقوم بعملية الطرح:

$$6\,X_1 + \cancel{2\,X_2} = 12$$

$$2\,X_1 + \cancel{2\,X_2} = 8$$

$$4\,X_1 = 4$$

$$\Rightarrow X_1 = 1$$

بتعويض قيمة X1 في احدى المعادلات نجد :

$$X_1 = 1$$

$$6(1) + 2\,X_2 = 12.$$

$$2\,X_2 = 12-6$$

$$2\,X_2 = 6$$

$$X_2 = 3$$

وبالتالي فإن إحداثية نقطة التقاطع هي (1.3)

بما أن دالة الهدف Min فإن المنطقة المثلى هي التي تقع فوق نقطة التقاطع والبعيدة عن نقطة الأصل.

أما الحل الامثل يقع ضمن حدود المنطقة R التي تقع فوق نقطة التقاطع

هي من بين النقاط التالية : A(0.6) / B(1.3) / C(4.0)

بتعويض هذه النقاط في دالة الهدف نستطيع التعرف على دالة الهدف Min

النقاط	دالة الهدف
Z =100(4) + 80(0) = 400	(4.0)
Z =100(1) + 80(3) = 340*	(1.3)
Z =100(0) + 80(6) = 480	(0.6)

بما أن دالة الهدف من نوع (Min) فإن النقطة (1.3) تحقق الحل الامثل أي تحقق اقل تكاليف

حالات خاصة:

الحلول الغير محدودة

في هذه الحالة يوجد عدد لا نهائي من الحلول ويمكن توضيح ذلك بالمثالي التالي:

$$\text{Max } Z = 10\,X_1 + 20\,X_2$$

S.T0

$$3\,X_1 + 5\,X_2 \geq 75$$

$$X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تحويل القيود الى معادلات مع تحديد الاحداثيات

$$3\,X_1 + 5\,X_2 = 75$$

$$\text{If } X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 75/5 = 15 \rightarrow (0\,.\,15)$$

$$\text{If } X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 25 \rightarrow (25\,.\,0)$$

$$X_2 = 12$$

ثانيا تحديد نقطة التقاطع.

$$3\,X_1 + 5X_2 = 75$$

$$X_2 = 12$$

بتعويض X2 في المعادلة 1 نجد :

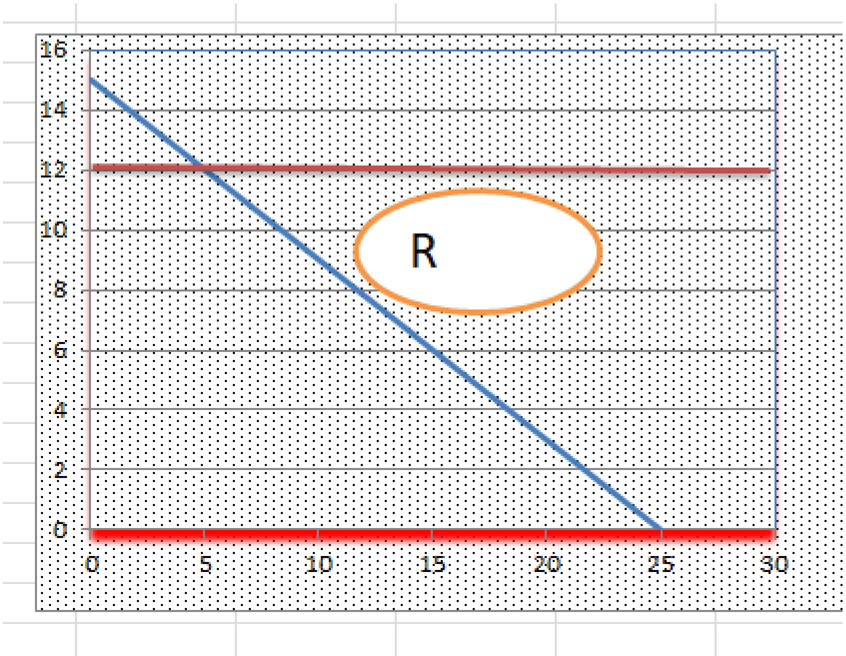
$$3\,X_1 + 5(12) = 75$$

$$3\,X_1 = 75 - 60 = 15$$

$X_1 = 5$

(5 . 12)

الرسم البياني



بما أن منطقة الحل مفتوحة ليس لها حدود فإننا نقول أنه توجد العديد من الحلول

وبما أن دالة الهدف هي تعظيم Max فإنا نقول أنه كلما زادة قيمه X1 زادة قيمة دالة الهدف

وبناء على ذلك نجد أن الحل غير محدود

حالات خاصة بتعدد الحلول المثلى

وهي احتمال وجود اكثر من حل امثل للمشكلة كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال: اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية

$$Max\ Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.T0

$$2X_1 + 4X_2 \leq 12$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

أولا: تحويل القيود إلى معادلات و تحديد الاحداثيات

$$2X_1 + 4X_2 = 12 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$X_1 + X_2 \leq 5 \ \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$2X_1 + 4X_2 = 12$$

If $X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 3 \rightarrow (0 . 3)$

If $X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 6 \rightarrow (6 . 0)$

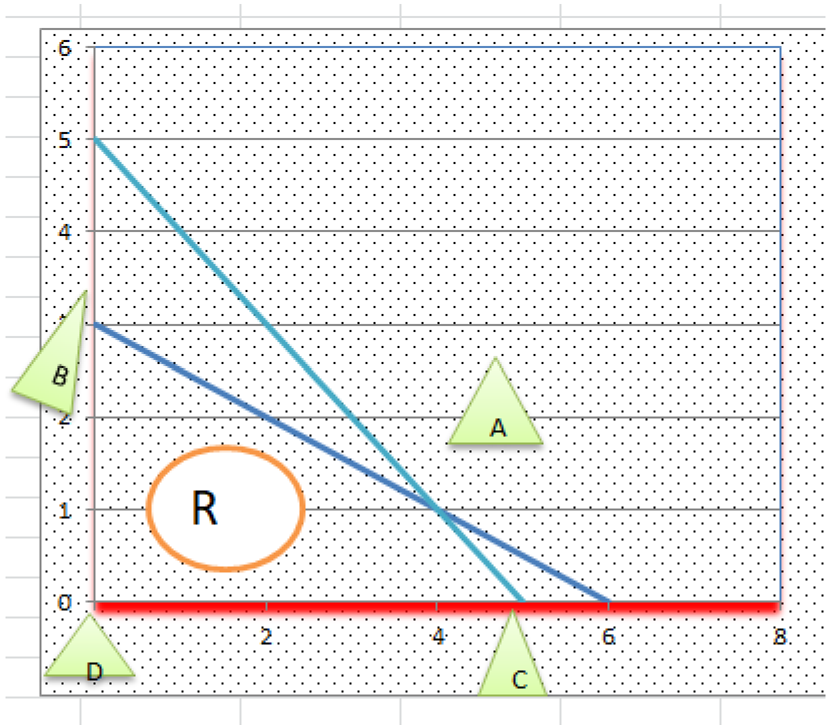
$$X_1 + X_2 \leq 5 \ \ldots\ldots\ldots(2)$$

If $X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 5 \rightarrow (0 . 5)$

If $X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 5 \rightarrow (5 . 0)$

ثانيا: حساب احداثية نقطة التقاطع.

الرسم البياني



نضرب المعادلة (2) برقم 2

$$2(X_1 + X_2)= 2(5)$$

$$2 X_1 + 2 X_2 = 10$$

نطرح المعدلة 1 من 2

$$\cancel{2} X_1 + 4 \ X_2 = 12$$

$$\cancel{2} X_1 + 2 X_2 = 10$$

$$2 X_2 = 2$$

$$X_2 = 1$$

بتعويضها في احدى المعادلات نجد

X2=1 ➔2X1+4(1)=12 ➔X1 =4

➔A(4 ,1)

نحدد منطقة الحل الامثل بعد تحديد منطقة التقاطع

هي (A,B,C,D) الحل الأمثل هو أحد هذه النقاط

من الجدول نلاحظ أن دالة الهدف تحقق قيمة عظمى عند !حداثيتين هما A و B أي وجود أكثر من حل وعليه هذه الحالة تسمي حالة تعدد الحلول المثلى

النقاط	دالة الهدف $Z = 2X_1 + 4X_2$
A(4.1)	2(4) + 4(1) = 12
B(0.3)	2(0) + 4(3) = 12
C(5.0)	2(5) + 4(0) = 10
D(0.0)	2(0) + 4(0) = 0

حالات خاصة

عدم وجود حلول مقبولة

في هذه الحالة تكون منطقة الحلول الممكنة غير موجودة لتعاكس اااشارات القيود، أي أن القيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة

مثال

$$Max\ Z = 20\ X_1 + 15\ X_2$$

S.T 0 :

$$5\ X_1 + 10\ X_2 \leq 25$$

$$5\ X_1 + 10\ X_2 \leq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

أولا: تحويل القيود الى معادلات مع تحديد الإحداثيات

$$5\ X_1 + 10\ X_2 = 25.........(1)$$

If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 25/10 = 2,5 \Rightarrow (0\ .\ 2,5)$

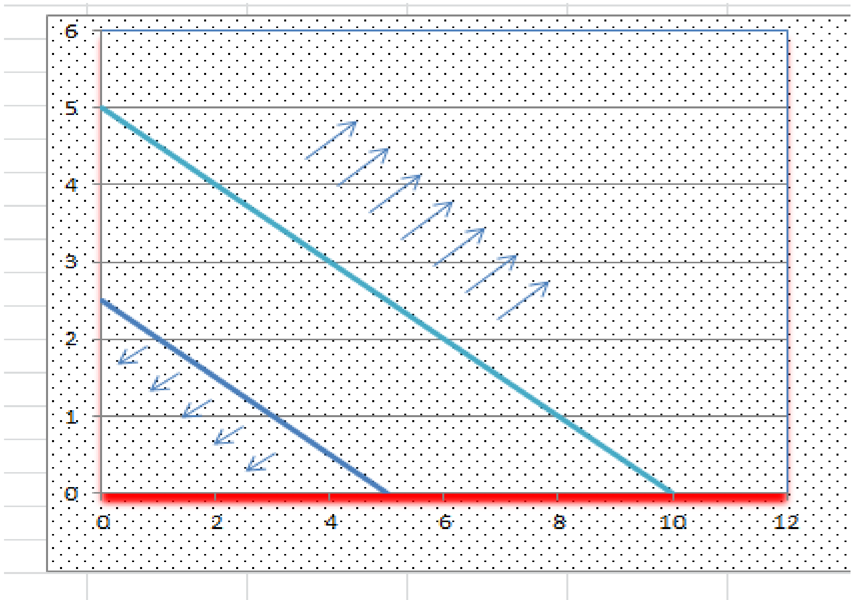
If $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5 \Rightarrow (5\ .\ 0)$

$$5\ X_1 + 10\ X_2 = 50...........(2)$$

If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5 \Rightarrow (0\ .\ 5)$

If $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10 \Rightarrow (10\ .\ 0)$

الرسم البياني



نلاحظ أن القيودلا تتقاطع في منطقة واحدة ولاتحمل نفس الاشارة ففي هذه الحالة نقول لا توجد حلول .

الطريقة المبسطة Simplex Méthode

هي طريقة رياضية تستخدم في حل نماذج البرمجة الخطية في عدد محدود من الخطوات .

خصائصها:

تستعمل في النموذج الذي يحتوى على متغيرين أو في النموذج الذي يحتوي على أكثر من متغيرين فهي تختلف عن طريقة الرسم البياني حيث تتعامل هذه الاخيرة مع النموذج الذي يتضمن متغيرين فقط .

خطوات الحل: في حالة دالة الهدف Max

تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية أي تحويل القيود من متراجحات الى معادلات مع إضافة المتغير الوهمي Si لكل قيد مع معامل واحد

نظيف للقيد الأول S_1 (1)

نظيف للقيد الثاني S_2 (1)

نظيف للقيد الثالث S_3 (1)

نظيف للقيد I S_i (1)

اضافة المتغير الوهمي $0S_1 + 0S_2 + 0S_3$ حسب عدد القيود الى دالة الهدف مع معامل يساوي(0)

تحويل قيم النموذج إلى جدول الحل الأساسي الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الأساسية وغير الأساسية بالإضافة الى معاملات متغيرات في دالة الهدف

1-3 عدد صفوف الجدول حسب عدد المتعرات الوهمية

إذا كان لدينا S3, S2, S1 فإن عدد صفوف الجدول تكون ثلاثة

2-3 عدد أعمدة الجدول حسب متغيرات دالة الهدف مضاف إليها المتغيرات الوهمية

3-3 قيم الصف الأول تأخذ قيم معاملات القيد الأول

قيم الصف الثاني تأخذ قيم معاملات القيد الثاني

قيم الصف I تأخذ قيم معاملات القيد I

4-3 قيم العمود الأخير هي قيم الطرف الثاني من القيود

قيم الصف الأخير هي معاملات دالة الهدف مع ضرب المعاملات في (1-)

تحديد المتغير الداخل:

نبحث في الصف الأخير الخاص بقيم دالة الهدف عن أكبر قيمة لكن بإشارة السالب وما يقابل هذه القيمة من متغير X_1 أو X_2 أو X_3 فهو المتغير الداخل.

تحديد المتغير الخارج:

يكون بقسمة عناصر العمود الاخير على عناصرصف المتغير الداخل

1-5 نختار أقل قيمة موجبة بعد قسمة العمود الأخير (R.H.S) على عناصر المتغير الداخل مع إهمال القيم الصفرية والسالبة وما يقابل هذه القيمة من المتغيرات , S1 , S2 S3 فهو المتغير الخارج

إيجاد العنصر المحوري: وهو نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج في الجدول الأساسي.

إيجاد معادلة المحور

معادلات المحور تستخرج بقسمة عناصر صف المتغير الخارج على العنصر المحوري

إيجاد قيم الصفوف المتبقية S . Z بالمعادلة التالية

عناصر الصف الجديد= عناصر الصف القديم –(عنصر التقاطع بين العمود الداخل والصف المعني × معادلة المحور).

تحويل القيم المتحصل عليها الى الجدول يسمى الجدول الثاني.

نتوقف عن الحل إذا كانت جميع قيم دالة الهدف موجبة , والحل هو قيم المتغير الداخل وقيمة دالة الهدف الموجودة في الطرف الأيمن للجدول الاخير.

إذا كانت قيم دالة الهدف سالبة فهنا يمكن القول أننا لم نصل إلى الحل الأمثل ونقوم بنفس الخطوات السابقة انطلاقا من تحديد المتغير الداخل بالجدول الأخير.

ملاحظة

إذا كانت دالة الهف(تدنية التكاليف) Min فإننا نعالج المشكلة بنفس الخطوات الخاصة بدالة الهدف Max ويبقى الاختلاف في ما يلي:

اختيار المتغير الداخل يرافق أكبر عنصر موجب في دالة الهدف

الوصول الى الحل الأمثل عندما تكون جميع قيم دالة الهدف سالبة أو مساوية للصفر.

مثـــال

اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بطريقة Simplex وطريقة الرسم البياني

Simplex

$$\text{Max } Z = 10\,X_1 + 12\,X_2$$

S/ C

$$2\,X_1 + 2\,X_2 \leq 4$$

$$8\,X_1 + 2\,X_2 \leq 8$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

أولا: تقوم بتحويل القيود الى مساواة مع إضافة المتغير الوهمي Si أي تحويل المتباينات الى معادلات

$$\text{Max } Z = 10 X_1 + 12 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2$$

$$S/C \ : 2 X_1 + 2 X_2 + S_1 = 4$$

$$8 X_1 + 2 X_2 + S_2 = 8$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

ثانيا: اعداد الجدول الأساسي (الأولي).

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
S_1	2	2	1	0	4
S_2	8	2	0	1	8
Z	-10	-12	0	0	0

ثالثا : تحديد المتغير الداخل

نبحث في معاملات دالة الهدف عن أكبر قيمة ولكن بإشارة سالبة .

ما يقابل هذه القيمة من المتغيرات القرارية $X_1 . X_2$ فهو المتغير الداخل .

في مثالنا لدينا (-12) هي أكبر قيمة بإشارة سالبة يقابها من المتغيرات القرارية X2 فهو المتغير الداخل

B.V		X_2			R.H.S
Z	-10	-12	0	0	0

رابعا: تحديد المتغير الخارج

يتم تحديد المتغير الخارج بعد قسمة عناصر العمود الثابت (B) (R.H.S) على العناصر المناظرة له في عمود العنصر الداخل X2 وأقل قيمة موجبة تحدد لنا من هو المتغير مع اهمال المتغيرات ذات القيم السالبة أو الصفرية

B.4		X_2			R.H.S
S_1		2			4
S_2		2			8
Z					

$S1= 4/2=2$ $S2=8/2=4$

اقل قيمة موجبة تجد لنا من هو المتغير الخارج وهو S_1

خامسا : تحديد العنصر المحوري

العنصر المحوري هو (2) وهو نقطة تقاطع عمود العنصر الداخل مع صف المتغير الخارج .

سادسا: معادلة المحور

إيجاد قيم الصف المحوري أو معادلة المحور بقسمة قيم صف المتغير الخارج على العنصر المحوري

B.4		X_2			R.H.S
X_2	**1**	**1**	**1/2**	**1**	**2**
S_2					
Z					

سادسا استخراج عناصر S_2 بالمعادلة التالية:

عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم - (عناصر التقاطع × معادلة المحور)

S_2
8 - (2 * 1) = 6
2 - (2 * 1) = 0
0- (2 * 1 / 2) = - 1
1-(2*0) =1
8- (2*2) = 4

Z
-10- (-12*1) =2
-12- (-12*1) =12-12 =0
0- (-12*1/2) =6
0- (-12*0) =0
0- (-12*2) =-10-12 =24

ثامنا: اعداد الجدول الثاني

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
X_2	1	1	1/2	1	2
S_2	6	0	1-	1	4
Z	2	0	6	0	24

بما أن دالة الهدف لا تحتوي على عناصر سالبة فنقول أننا وصلنا الى الحل الأمثل

وهو

$X_1=0$, $X_2=2$, $Z=24$

أوجد الحل الأمثل باستخدام الرسم البياني

$$\text{Max } Z = 10 X_1 + 12 X_2$$

S/ C

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 4$$

$$8 X_1 + 2 X_2 \leq 8$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

أولا: تحويل القيود الى معادلات

$$2 X_1 + 2 X_2 = 4$$

$$8 X_1 + 2 X_2 = 8$$

إيجاد احداثيات المعادلات

المعادلة رقم ....(1)

$$2 X_1 + 2 X_2 = 4$$

IF/$X_1=0$ ➔ $2(0)+2X_2=4$ ➔ $X_2=4$

4)

IF/ $X_2=0$➔ $2X_1+ 2(0)=4$ ➔$X_1=2$

(2,0)

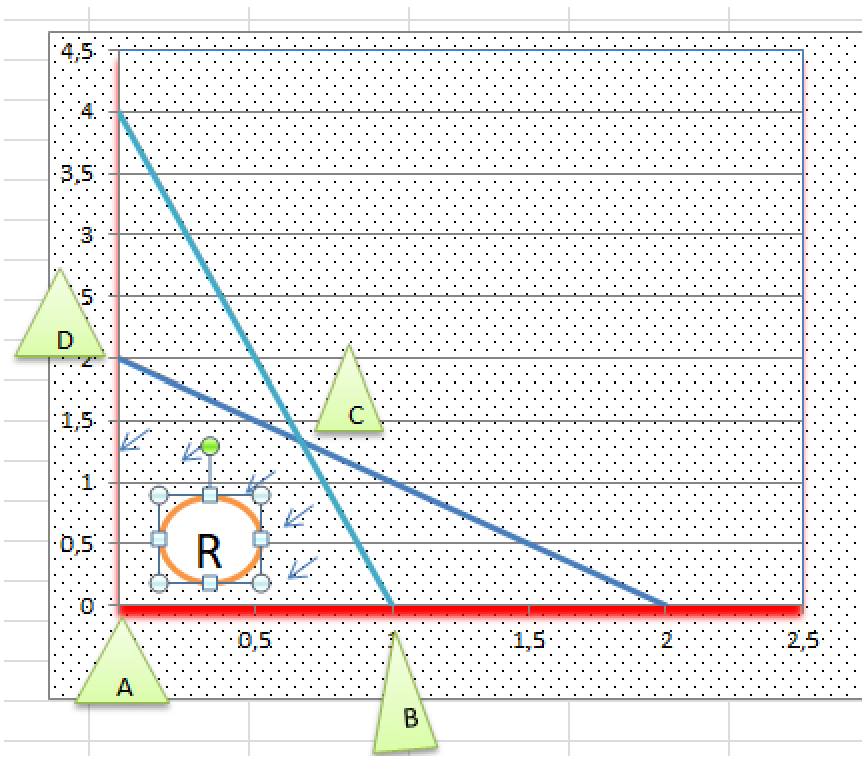
المعادلة رقم ....(2)

IF / X_2 =0 $\rightarrow 8X_1+2(0)=8 \rightarrow$ X1= 1

(1,0)

IF / X_1 =0 $\rightarrow 8(0) +2\ X_2=8 \rightarrow X_2= 4$

(0, 4)



من الرسم البياني يمكن القول أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة R والتي تقع ضمن النقاط (A.B.C.D)

أما الحل الأمثل فهو يقع ضمن حدود المنطقة R (A.B.C.D)

إيجاد احداثية نقطة التقاطع C بالطريقة الجبرية بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1).

$$2X_1 + \cancel{2X_2} = 4$$

$$8X_1 + \cancel{2X_2} = 8$$

$$6X_1 = 4$$

$$\Rightarrow X_1 = 2/3$$

بتعويض $X_1=2/3$ في المعادلة الأولى نجد ما يلي:

$$2(2/3)+2X_2=4$$

$$X_2=4/3$$

احداثية نقطة التقاطع بين المستقيمين هي (2/3,4/3)

من الجدول نلاحظ أن دالة الهدف تحقق قيمة أعلى قيمة عند النقطة D

النقاط	دالة الهدف $Z = 10X_1 + 12X_2$
A(0.0)	$10(0) + 12(0) = 0$
B(1.0)	$10(1) + 12(0) = 10$
C(2/3.4/3)	$10(2/3) + 12(4/3) = 22$
D(0.2)	$10(0) + 12(2) = 24^*$

من خلال النتائج المتحصل عليها فإن الحل الأمثل هو

$X_1= 0$, $X_2= 2$, $Z=24$

مثال رقم 02

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية

$$\text{Max } Z = 30X_1 + 10X_2$$

$$\text{S/C} : 2X_1 + 4X_2 \leq 400$$

$$6X_1 + 4X_2 \leq 600$$

$$2X_1 \leq 300$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

أولا:نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات مع إضافة المتغير الوهمي S

$$\text{Max } Z = 30X_1 + 10X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S/C \quad : 2X_1 + 4X_2 + S_1 = 400$$

$$6X_1 + 4X_2 + S_2 = 600$$

$$2X_1 + S_3 = 300$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ثانيا: نقوم بتحويل قيم النموذج إلى جدول الحل الاساسي الأولي

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	2	4	1	0	0	400
S_2	6	4	0	1	0	600
S_3	2	0	0	0	1	300
Z	-30	-10	0	0	0	0

ثانيا: اختبار المتغير الداخلي وهو أكبر قيمة بإشارة السالب في الصف الأخير الخاص بدالة الهدف

في الجدول لدينا (30-)

وعلية فإن X_1 هو المتغير الداخل

رابعا: تحديد المتغير الخارج ويكون كما يلي

4-1: قسمة طرف المتغير الثابت (R.H.S) على عناصرالعمود الخاص بالمتغير الداخل X_1

في مثالنا

$300/2=150 \quad 600/6=100^{*} \quad 400/2=200$

- من النتائج المتحصل عليها يمكن القول أن S_2 هو المتغير لأنه يقابل أقل قيمة موجبة

خامسا:العنصر المحوري هو نقطة تقاطع عناصر عمود العنصر الداخل مع عناصر عمود العنصر الخارج X_1 مع S_2 وهو 6

سادسا: معادلة المحور يتم حسابها بقسمة صف المتغير الخارج على العنصر المحوري

X_1:6/6=1 , 4/6=2/3, 0/6, 1/6, 0/6, 600/6=100

5-2: حساب قيم S_1, S_3, Z

عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم – (عنصر التقاطع × معادلة المحور)

S_1	S_3	Z
2-(2×1)=0	**2-(2×1)=0**	-30-(30×1)=0
4-(2×4/6)=16/6	**0-(2×4/6)=-4/3**	-10(30×4/6)=10
1-(2×0)=1	**0-(2×0)=0**	0-(30×0)=0
0-(2×1/6)=-1/3	**0-(2*1/6)=-1/3**	0-(30×1/6)=5
0-(2×0)=0	**1-(2×0)=1**	0-(30×0)=0
400-(2×100)=200	**300-(2×100)=100**	0-(30×100)=3000

اعداد الجدول التالي:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	0	16/6	1	-1/3	0	200
X_1	1	2/3	0	1/6	0	100
S_3	0	-4/3	0	-1/3	1	100
Z	0	10	0	5	0	3000

من الجدول نلاحظ أن جميع قيم دالة الهدف موجبة وبالتالي نقول أننا وصلنا إلى الحل الأمثل:

$Z = 3000, X_1 = 100, X_2 = 0$

حل المثال السابق بالطريقة البيانية

$$\text{Max } Z = 30\, X_1 + 10\, X_2$$

$$S/C\ :\ 2\, X_1 + 4\, X_2 \leq 400$$

$$6\, X_1 + 4\, X_2 \leq 600$$

$$2\, X_1 \leq 300$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

أولا:نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

$$\text{Max } Z = 30\, X_1 + 10\, X_2$$

$$S/C\ :\ 2\, X_1 + 4\, X_2 = 400$$

$$6\, X_1 + 4\, X_2 = 600$$

$$2X_1 = 300$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

إيجاد احداثيات المعادلات

المعادلة رقم ....(1)

$$2X_1 + 4X_2 = 400$$

IF/X_1=0 ➔ 2(0)+4X_2=400 ➔ X_2=100

(0 ,400)

IF/ X_2=0➔ 2X_1+ 4(0)=400 ➔X_1=200

(200,0)

المعادلة رقم ....(2)

$$6X_1 + 4X_2 = 600$$

IF / X_2 =0 ➔6X_1+4(0)=600➔ X_1= 100

(100,0)

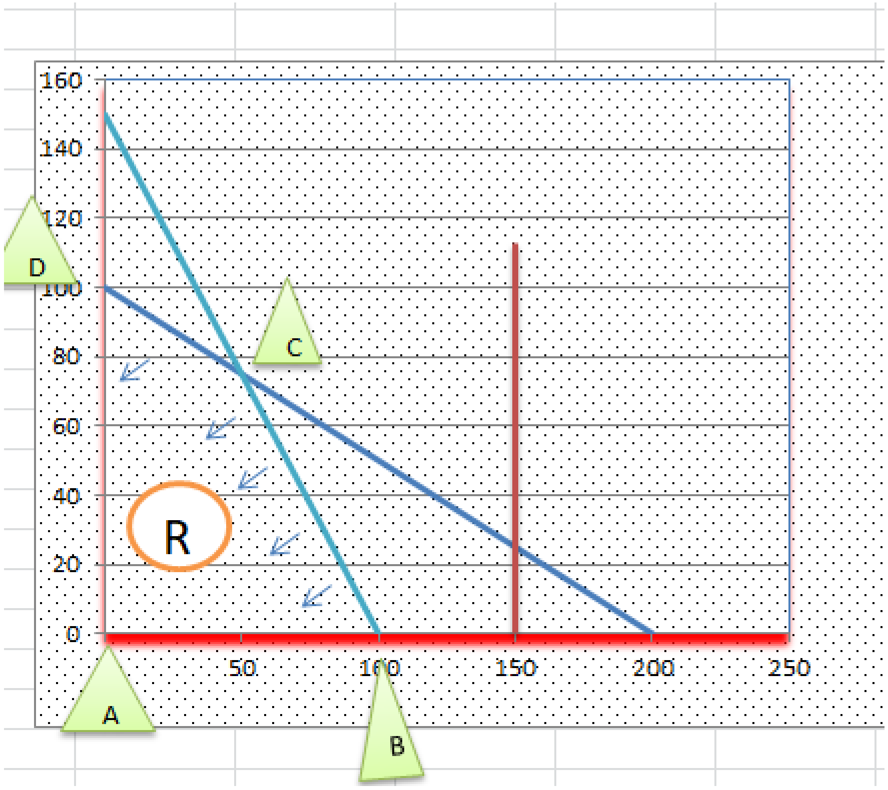
IF / X_1 =0 ➔6(0) +4 X_2=600➔ X_2= 150

(0, 150)

المعادلة ....(3)

$$2X_1 = 300$$

➔X_1=150



من الرسم البياني يمكن القول أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة R والتي تقع ضمن النقاط (A.B.C.D)

أما الحل الأمثل فهو يقع ضمن حدود المنطقة R (A.B.C.D)

إيجاد احداثية نقطة التقاطع C بالطريقة الجبرية بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1).

$$6\ X_1 + \cancel{4\ X_2} = 600$$

$$\underline{2\ X_1 + \cancel{4\ X_2} = 400}$$

$$4X_1 = 200$$

$$\Rightarrow X_1=50$$

بتعويض $X_1=50$ في المعادلة نجد ما يلي:

$$2(50)+4X_2=400$$

$$X_2=70$$

احداثية نقطة التقاطع بين المستقيمين هي (50,70)

حساب الحل الأمثل بتعويض الاحداثيات في معادلة دالة الهدف

النقاط	دالة الهدف $Max\ Z = 30\ X_1 + 10\ X_2$
A(0.0)	$30(0) + 10(0) = 0$
B(100.0)	$30(100) + 10(0) = 3000^*$
C(50.70)	$30(50) + 10(70) = 2200$
D(0.100)	$30(0) + 10(100) = 1000$

من خلال النتائج المتحصل عليها فإن الحل الأمثل هو

$X_1 = 100$, $X_2 = 0$, $Z = 3000$

مثال : اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بطريقة Simplex وطريقة الرسم البياني

$$Max\ Z = 50X_1 + 40X_2$$

S/C

$$6X_1 + 10X_2 \ \leq 300$$

$$2X_2 \ \leq 40$$

$$16X_1 + 10X_2 \ \leq 600$$

$$X_1, X_2, X_3 \ \geq 0$$

الحل بإستخدام الطريقة المبسطة Simplex

أولا: نقوم بتحويل القيود الى مساواة مع إضافة متغير وهمي S_i

$$Max\ Z = 50X_1 + 40X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

S/to

$$6X_1 + 10X_2 + S_1 = 300$$

$$2X_2 + S_2 = 40$$

$$16X_1 + 10X_2 + S_3 = 600$$

ثانيا: إعداد الجدول الأساسي:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	6	10	1	0	0	300
S_2	10	2	0	1	0	40
S_3	16	10	0	0	1	60
Z	-50	-40	0	0	0	0

ثالثا: تحديد المتغير الداخل: بما أن 50- هي أكبر قيمة مع إشارة سالبة فإن X_1 هو المتغير الداخل.

رابعا: تحديد المتغير الخارج: يحدد بقسمة العمود الخاص ب R.H.S على عناصر العمود الداخل X_1 وثم نأخذ المتغير الوهمي الذي يقابل أقل قيمة موجبة يسمى المتغير الخارج.

أي قسمة

R.H.S
300
40
600

على

X
6
0
16

=

S_3
50
0
37.5

نأخذ أقل قيمة موجبة مع إهمال القيم الصفرية والقيم السالبة, وما يقابل هذه القيمة 37.5 من المتغيرات S_1 أو S_2 أو S_3 فهو المتغير الخارج فهو S_3

خامسا: إيجاد العنصر المحوري

وهي نقطة تقاطع عناصر صف المتغير الخارج مع عناصر عمود المتغير الداخل.

وفي مثالنا هي النقطة 16

سادسا: إيجاد قيم الصف المحوري

وهي قسمة الصف الخارج على العنصر المحوري وهي:

أي قسمة قيم الصف الثالث على 16

X_1	16/16=1	10/16=0.625	0/16=0	0/16=0	0/16=0	600/16=37.5

سابعا: إيجاد قيم الصفوف المتبقية S_1 و S_2 و Z بالمعادلة التالية:

عناصر الصف الجديد= عناصر الصف القديم - (عنصر التقاطع بين العمود الداخل والصف المعني× معادلة المحور)

S_1	S_2	Z
6-(6×1)=0	0-(0×1)=0	-50-(-50×1)=0
10-(6×0.625)=6.25	2-(0×0.625)=2	-40-(50×0.625)=8.75-
1-(6×0)=1	0-(0×0)=0	0-(-50×0)=0
0-(6×0)=0	1-(0×0)=1	0-(-50×0)=0
0-(6×1/16)=0	0-(0×1/16)=0	0-(-50×1/16)=3.125-
300-(6×37,5)=75	40-(0×37.5)=40	0-(-50×37.5)=1875

إعداد الجدول الثاني

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	0	6.25	1	0	0	75
S_2	0	2	0	1	0	40
X_1	1	0.625	0	0	0	37.5
Z	0	8.75	0	0	0	1875

إذن نلاحظ أن جميع قيم دالة الهدف موجبة وعلية فإننا نستطيع القول إننا وصلنا للحل الأمثل وهو:

$Z = 1875,\ X_1 = 37.5,\ X_2 = 0$

الحل بإستخدام الطريقة البيانية

أولا: نقوم بتحويل القيود الى مساواة

$$Max\ Z = 50X_1 + 40X_2$$

Sto

$$6X_1 + 10X_2 = 300$$

$$2X_2 = 40$$

$$16X_1 + 10X_2 = 600$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

رسم الشكل البياني:

المعادلة رقم ......(1)

إيجاد احداثيات المعادلات

$$6X_1 + 10X_2 = 300$$

IF/X_1=0 ➔ 6(0)+10X_2=300 ➔ X_2=30

(0 30,)

IF/ X_2=0➔ 6X_1+ 10(0)=300 ➔X_1=50

(50,0)

المعادلة رقم ......(2)

إيجاد احداثيات المعادلات

$$2X_2 = 40$$

➔ X_2=30

المعادلة رقم ......(3)

$$16X_1 + 10X_2 = 600$$

إيجاد احداثيات المعادلات

IF/X_1=0 ➔ 16(0)+10X_2=600 ➔ X_2=60

(0.60)

IF/ X_2=0➔ 16X_1+ 10X_2=600 ➔X_1=37.5

(37.5 ,0)

النموذج المقابل

يسمى النموذج البديل أو المقابل حيث يتضمن نفس بيانات النموذج الأول (السمبلكس).

وله فوائد كبيرة ومعانى اقتصادية مهمة فمثلاً لو كانت المشكلة التي نريد حلها تتعلق بمشكلة اقتصادية تتضمن تعظيم الربح لدالة الهدف فإن هذا النموذج يبحث عن الحل الأمثل لدالة الهدف وهو تعظيم الربح وفي نفس الوقت يبحث عن الحل الأمثل لدالة الهدف وهو تقليل التكاليف أي يعالج مشكلتين في نفس الوقت

كما أن لهذا النموذج ميزة على النموذج الأول وهي كونه يتضمن قيود أقل وعددها مرتبط بعدد المتغيرات الموجودة بالنموذج الأول.

من أهمية كذلك التعرف على ابعاد المشكلة فإذا كان النموذج الأولي بصيغة Max فإننا يمكن التعرف على الجانب الأولي من المشكلة وهي تعظيم الربح، وعند تحويل النموذج الى النموذج الثنائي سوف تتغير دالة الهدف إلى Min فيمكننا التعرف على جانب الثاني من المشكلة وهي تقليل التكاليف ، كما من أهميته كذلك تقليل الجهد الحسابي المطلوب.

خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل:

إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولى من نوع Max فإنها تتحول إلى Min في النموذج الثاني (المقابل) وبالعكس.

عناصر الطرف الأيمن من القيود في المشكلة الأولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية.

معاملات دالة الهدف في المشكلة الأولية تصبح عناصر الطرف الأيمن للقيود في المشكلة الثنائية.

إذا كانت الثنائية في النموذج الأول ≥ تصبح ≤ في النموذج الثنائي والعكس صحيح.

الأعمدة في النموذج الأول تصبح صفوف من النموذج الثاني.

إذا كانت دالة الهدف Max يجب أن تكون المتباينة أقل أو يساوي (ضرب القيد في (1-) اذا كانت ≤)

إذا كانت دالة الهدف Min يجب أن تكون المتباينة أكبر أو يساوي (ضرب القيد في (1-) اذا كانت ≥)

إذا كانت القيد عبارة عن مساواة يتم تحويل القيد الى متباينين مختلفين في الاتجاه ≥ ≤

خطوات بشكل مختصر:

إذا كان النموذج الأولي يأخذ Max فإن الثنائي يأخذ Min وبالعكس.

حدود القيود في النموذج الأول تحول إلى معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي وبالعكس.

المتغيرات في النموذج الأول أو المشكلة الأولية X_1 يقابلها Y_1 النموذج الثنائي.

اذا كانت المتباينة ≥ تتحول الى ≤ وبالعكس.

اذا كانت المتباينة = تحول إلى مباينتين واحدة تأخذ ≥ والأحرى ≤.

اذا كان في المشكلة الأولية حل أمثل فإنه يقابله حل أمثل في المشكلة الثنائية و العكس صحيح.

اذا كانت دالة الهدف Max فيجب أن يكون جميع قيود النموذج الأولي بمتباينة أقل أو يساوى ≥ والعكس صحيح في حالة دالة الهدف Min

مثال :حول النموذج الأولي إلى النموذج المقابل

$$Max\ Z = 4X_1 + 5X_2$$

S/to

$$X_1 + 2X_2 \ \geq 5$$

$$2X_1 + X_2 \ \leq 8$$

$$X_1 + 3X_2 = 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

بما أن دالة الهدف هي تعظيم الأرباح Max فيجب أن تكون إشارة القيود أقل أو يساوي

$$Max\ Z = 4X_1 + 5X_2$$

$$-X_1 - 2X_2 \leq -5$$

$$2X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تحويل إشارة القيد الأخير

$-X^1 - 2X^2 \leq -5$ .... Y_1

$2X_1 + X_2 \leq 8$ .... Y_2

$X_1 + 3X_2 \leq 4$ .... Y_3

$-X_1 - 3X_2 \leq -4$ .... Y_4

النموذج المقابل

$$Min\ Z = -5Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 - 4Y_4$$

S/to

$-Y_1 + 2Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq 4$

$-2Y^1 - Y_2 + 3Y_3 - 3Y_4 \geq 4$

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$

حول نموذج البرمجة الخطية إلى النموذج المقابل

$$Max\ Z = 6X_1 + 11X_2$$

S/to

$2X_1 + 2X_2 \leq 40$…………….. Y_1

$2X_1 + 3X_2 \leq 12$…………….. Y_2

$$X_1, X_2 \geq 0$$

النموذج المقابل

$$Min\ W = 40Y_1 + 12Y_2$$

S ⁄to

$2Y_1 + 2Y_2 \geq 6$

$2Y_1 + 3Y_2 \geq 11$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

مثال 2:

النموذج الأولي:

$$Max\ Z = \ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3$$

S/to

$4X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 30$................$Y_1$

$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 30$................$Y_2$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

النموذج المقابل:

$$Min\ W = 30Y_1 + 30Y_2$$

S/to

$4Y_1 + 2Y_2 \geq 2$

$Y_1 + 3Y_2 \geq 5$

$3Y_3 + Y_3 \geq 5$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

مثال 3:

استخرج النموذج المقابل لصيغة البرمجة الخطية التالية:

$$Max\ Z = \ 4X_1 + 3X_2 - 5X_3$$

S/to

$$X_1 - 3X_2 + 5X_3 \leq 10$$

$$15X_1 + 2X_2 - 2X_3 \geq 5$$

$$3X_1 - X_2 - X_3 = 8$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution

بما أن دالة الهدف من نوع Max فيجب أن تكون المتباينات من نوع أقل أو يساوي.

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2 - 5X_3$$

S/to

$X_1 - 3X_2 + 5X_3 \leq 10$

$-15X^1 - 2X^2 + 2X^3 \leq -5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. -1$ ضرب في

$3X_1 - X_2 - X_3 \leq 8$

$3X_1 - X_2 - X_3 \geq 8$

$2X_1 + 2X_2 \leq 2$

نلاحظ أن القيد الرابع مازال من نوع أكبر أو يساوي وعليه:

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2 - 5X_3$$

S/to

$X_1 - 3X_2 + 5X_3 \leq 10$.......................................Y_1

$-15X_1 - 2X_2 + 2X_3 \leq -5$..................................Y_2

$3X_1 \; - X_2 \; - X_3 \leq 8$...Y$_3$

$-3X_1 \; + X_2 \; + X_3 \leq -8$...-1 ضرب في .... Y$_4$

$2X_1 \; + 2X_2 \; \leq 2$.................................Y$_5$

النموذج المقابل هو كما يلي:

$$Min\ W = 10Y_1 - 5Y_2 \; + 8Y_3 - 8Y_4 + 2Y_5$$

S/to

$Y_1 - 15Y_2 \; + 3Y_3 - 3Y_4 + 2Y_5 \geq 4$

$-3Y_1 - 2Y_2 \; - Y_3 + Y_4 + Y_5 \geq 3$

$5Y_1 + 2Y_2 \; - Y_3 + Y_4 \geq -5$

$$Y_1, Y_2 \, , Y_3 \geq 0$$

مثال 4:

استخرج النموذج الثنائي لمعادلة البرمجة الخطية التالية:

Primo modèle

$$Max\ Z = \; -X_1 \; - X_2 - X_3 - X_4 - X_5$$

Subject to Constraints

$$3X_1 \; - 3X_2 \; - 2X_3 + 4X_4 \leq 10$$

$$2X_1 \; + X_2 \; + X_3 \geq 10$$

$$X_1 \; + X_2 \; - X_3 + X_4 = 8$$

$$X_1 , X_2 , X_3, X_4 \geq 0$$

Solution

بما أن دالة الهدف Max فيجب وضع جميع المتباينات على شكل أقل أو يساوي

$$Max\ Z = \ -X_1\ - X_2 - X_3 - X_4 - X_5$$

Subject to Constraints

القيد الثالث يحول إلى متباينتين

$$3X_1\ - 3X_2\ - 2X_3 + 4X_4 \leq 10$$

$-2X^1 - X^2 - X^3 \leq -10 \ldots \ldots.$ لتحويل إشارةالقيد -1 في ضرب

$$X_1\ + X_2\ - X_3 + X_4 \leq 8$$

$$X_1\ + X_2\ - X_3 + X_4 \geq 8$$

بما أن القيد الأخير متباينة بأكبر أو يساوي فيجب ضربها في 1- ويكون لدينا

$$Max\ Z = \ -X_1\ - X_2 - X_3 - X_4 - X_5$$

Subject to constraints

$3X_1 - 3X_2 - 2X_3 + 4X_4 \leq 10 \ldots\ldots\ldots Y_1$

$-2X_1\ - X_2\ - X_3 \leq -10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_2$

$X_1\ + X_2\ - X_3 + X_4 \leq 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_3$

$-X^1 - X^2 + X^3 - X^4 \leq -8 \ldots\ldots\ldots Y_4$

إذن بعد تحويل القيود حسب دالة الهدف Max إلى متباينة بإشارة أقل أو يساوي نستطيع استخراج النموذج المقابل وهو كما يلي:

$$Min\ W = 10Y_1 - 10Y_2 + 8Y_3 - 8Y_4$$

S/to

$$3Y_1 - 2Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq -1$$

$$-3Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq -1$$

$$-2Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4 \geq -1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

مثال

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام الطريقة المبسطة Simplex Méthode ثم استخرج النموذج المقابل.

$$Max\ Z = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3$$

S/to

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 1920$$

$$10X_1 + 16X_2 + 8X_3 \leq 10.000$$

$$6X_1 + 12X_2 + 6X_3 \leq 4800$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل:

أولا تحويل النموذج إلى النموذج القياسي أي تحويل المتباينات إلى معادلات مع إضافة المتغير الوهمي S_i

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + S_1 = 1920$$

$$10X_1 + 16X_2 + 8X_3 + S_2 = 10000$$

$$6X_1 + 12X_2 + 6X_3 + S_3 = 4800$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

ثانيا: تحويل دالة الهدف إلى الشكل التالي:

$$Max\ Z = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3$$

➔

$$Z - 3X_1 - 4X_2 - 3X_3 = 0$$

ثالثا: إضافة المتغيرات الوهمية إلى دالة الهدف بمعامل "0"

$$Z - 3X_1 - 4X_2 - 3X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

رابعا: وضع البيانات في الجدول الأساسي

B . V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R . H . S
S_1	6	4	2	1	0	0	**1920**
S_2	10	16	8	0	1	0	**10000**
S_3	6	12	6	0	0	1	**4800**
Z	-3	-4	-3	0	0	0	**0**

خامسا:

تحديد المتغير الداخل (أقل قيمة)

بما أن دالة الهدف Max تعظيم الارباح فإننا نبحث عن أكبر قيمة بإشارة سالبة في السطر Z الخاص بدالة الهدف وما يقابله من المتغيرات فهو المتغير الداخل.

إذن 4- هي أكبر قيمة في الصف الأخير مع إشارة سالبة وعليه فإن X_2 هو المتغير الداخل.

سادسا:

تحديد المتغير الخارج (أقل قيمة) بعد قسمة (R . H . S) على عناصر عمود العنصر الداخل هو

$$\frac{1920}{4}=480\ ,\qquad \frac{10000}{16}=625\ ,\qquad \frac{4800}{12}=\mathbf{400}$$

إذن 400 هي أقل قيمة موجبة لذلك فإن العنصر الخارج هو S_3.

والعنصر 12 أين يتقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل يسمى العنصر المحوري.

سابعا: الصف المحوري

بقسمة قيم الصف S_3 على العنصر المحوري 12 نحصل على قيم الصف المحوري X_2

$$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{12}{12}=1\ ,\frac{0}{12}=0\ ,\frac{0}{12}=0\ ,\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\ ,\frac{4800}{12}=400$$

ثانيا: حساب قيم الصفوف (Z, S_1, S_2) بالمعادلة التالية

عناصر الصف الجديد S_1: عناصر الصف القديم S_1 (عنصر التقاطع بين صف S_1 والعمود الداخل X معادلة المحور)

S_1	S_2	Z
6 – (4 x ½) = 4	10 – (16 x 1/2) = 2	- 3 - (-4 x 1/2) = -1
4 – (4 x 1) = 0	16 – (16 x 1) = 0	- 4 - (- 4 x 1) = 0
2 – (4 x 1/2) = 0	8 – (16 x 1/2) = 0	-3 – (-4 x 1/2) = - 1
1 – (4 x 0) = 1	0 – (16 x 0) = 0	0 - (- 4 x 0) = 0
0 – (4 x 0) = 0	1 – (16 x 0) = 1	0 - (- 4 x 0) = 0
0 – (4 x 1/2) = -1/3	0 – (16 x 1/2) = -4/3	0 - (- 4 x 1/2) = 1/3
1920 – (4 x 400) = 320	10000 – (16 x 400) = 3600	0 - (- 4 x 400) = 1600

يتم ترتيب النتائج في الجدول:

B . V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R . H . 9
S_1	4	0	0	1	0	-1/3	320
S_2	2	0	0	0	1	-4/3	3600
X_2	1/2	1	1/2	0	0	1/12	400
Z	-1	0	-1	0	0	1/3	1600

بما أن قيم الصف Z مازالت سالبة فيعني أننا لم نصل إلى الحل الأمثل ... ونستمر في الحل

اولا - المتغير الداخل: أكبر قيمة بإشارة سالبة لدينا قيمتين (-1) X_3، (-1) X_1

نختار عشوائيا X_3

ثانيا المتغير الخارج : بعد قسمة عناصر العمود (R. H S) على قيم عمود المتغر الداخل X_3

نجد

$$\cancel{\frac{322}{0}} = ! \;,\; \cancel{\frac{3600}{0}} = ! \;, \frac{400}{1/2} = 800$$

إذن X_2 هو المتغير الخارج.

العنصر المحوري: هو نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج وهو 1/2

الصف المحوري: هو قسمة عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري وقيمه هي:

X_3	½ / ½	1/ ½	½/ ½	0/ ½	0/ ½	1/12 / ½	400 / ½
	1	2	1	0	0	1/6	800

إيجاد الصفوف المتبقية: (S_1, S_2, Z) بالمعادلة التالية

قيم الصف الجديد S_1= قيم الصف القديم S_1 - (عنصر التقاطع بين العمود الداخل S_1 * معادلة المحور)

S_1	S_2	Z
4 – (0 x 1) = 4	2 – (0 x 1) = 4	- 1 - (-1 x 1) = 0
0 – (0 x 2) = 0	0 – (0 x 2) = 0	0 - (- 1 x 2) = 2
0 – (0 x 1) = 0	0 – (0 x 1) = 0	-1 – (-1 x 1) = 0
1 – (0 x 0) = 1	0 – (0 x 0) = 0	0 - (- 1 x 0) = 0
0 – (0 x 0) = 0	1 – (0 x 0) = 1	0 - (- 1 x 0) = 0
-2 – (0 x 1/6) = - 2	-8 – (0 x 1/6) = - 8	2 - (- 1 x 1/6) = 13/6
320 – (0 x 800) = 320	3600 – (0 x 800) = 3600	1600 - (- 1 x 800) = 240

ترتيب القيم في الجدول

B . V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R . H . S
S_1	4	0	0	1	0	-2	320
S_2	2	0	0	0	1	-8	3600
X_2	1	2	1	0	0	1/6	800
Z	0	2	0	0	0	13/4	2400

اذن بما ان جميع قيم Z موجبة فيمكننا القول اننا وصلنا الى الحل الأمثل هو:

$X_1 = 0$

$X_2 = 0$

$X_3 = 800$

$Z = 2400$

للتحقق من النتيجة نعوض قيم في دالة الهدف.

السؤال الثاني: استخرج النموذج المقابل

لدينا دالة الهدف:

$$Max\ Z = 3X_1 + 4X_2 + 2X_3$$

$10X_1 + 16X_2 + 2X_3 \leq 1920$…….$y_1$

$10X_1 + 16X_2 + 8X_3 \leq 10000$ ……. y_2

$6X^1 + 12X^2 + 6X^3 \leq 4800$…….$y_3$

$$X_1\ X_2\ X_3 \geq 0$$

استخراج النموذج المقابل:

$$Min\ W = 1920Y1 + 10000Y2 + 4800Y3$$

$6Y1 + 10\ Y2 + 6Y3 \geq 3$

$4Y1 + 16Y2 + 12Y3 \geq 4$

$2Y1 + 8Y2 + 6Y3 \geq 3$

$$Y1, Y2, Y3 \geq 0$$

علاقة قيم النموذج الأولي مع قيم النموذج المقابل

أوجد الحل الامثل للنموذج الأصلي والنموذج المقابل بالطريقة البيانية

$$Max\ Z = 5X_1 + 6X_2$$

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 18$$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 25$$

$$X_1\ X_2 \geq 0$$

حل النموذج بالطريقة البيانية

بالنسبة للمعادلة ......(1)

$X_1 + 3X_2 \leq 18$ ➔ *$X_1+3X_2=18$*

If x1=0 ➔ *x2= 6* ➔ *(0.6)*

If x2=0 ➔ *x1= 18* ➔*(18.0)*

المعادلة رقم ......(2)

$5X_1+3X_2=25$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 25$$

الحل الأمثل:

بما ان:

$$Min\ W = Max\ Z = 2400$$

اوجد الحل الأمثل لدالة الهدف باستخدام طريقة Simplex Méthode

دالة الهدف

$$Max\ Z = 40X_1 + 50X_2$$

القيود

$$3X_1 + X_2 \leq 15$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$X_1\ X_2 \geq 0$$

أولا: تحويل النموذج إلى نموذج قياسي مع إضافة المتغيرات الوهمية:

$$3X_1 + X_2 + S_1 = 15$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 12$$

$$X_1\ X_2 \geq 0$$

ثانيا: تحويل دالة الهدف الى الشكل التالي:

$$Z - 40X^1 - 50X^2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

تحويل النموذج الى الجدول الأساسي:

B . V	X_1	X_2	S_1	S_2	R . H . S
S_1	3	1	1	0	15
S_2	1	2	0	1	12
Z	-40	-50	0	0	0

المتغير الداخل X_2 (50-) أكبر قيمة بإشارة سالبة.

المتغير الخارج

$$\frac{15}{1} = 15, \frac{12}{2} = 6$$

أقل قيمة هي 6 اذن المتغير الخارج هو S_2

العنصر المحوري هو 2

الصف المحوري 6 , 1/2, 0, 1, 1/2: X_2

قيم (Z , S_1)

S_1	Z
3 – (1 x ½) = 5/2 1 – (1 x 1) = 0 1 – (1 x 0) = 1 0 – (1 x ½) = - ½ 15 – (1 x 6) = 9	-40 – (-50 x 1/2) = -15 -50 – (-50 x 1) = 0 0 – (-50 x 0) = 0 0 – (-50 x 1/2) =25 0 – (-50 x 6) = 300

تحويل هذه القيم إلى جدول

B . V	X_1	X_2	S_1	S_2	R . H . S
S_1	5/2	0	1	-1/2	9
S_2	½	1	0	½	6
Z	-15	0	0	25	300

بما أنه توجد قيمة سالبة ضمن قيم الصف Z فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل ... ونستمر في العمل

قيم المتغير الداخل X_1

قيم المتغير الخارج S_1:

$$\frac{9}{5/2} = \frac{9 * 2}{5} = \frac{18}{5} \;, \qquad \frac{6}{1/2} = 12$$

العنصر المحوري هو 5/2

الصف المحوري: X_1:1 ,0 ,2/5 ,1/5 ,18/5

قيم (Z , X_2)

X_2	Z
½ – (1 x ½) = 0 1 – (½ x 0) = 1 0 – (½ x 2/5) = -2/10 ½ – (½ x -1/5) = 12/20 6 – (½ x 18/5) = 4.2	-15 – (-15 x 1) = 0 0 – (-15 x 0) = 1 0 – (-15 x 2/7) = 6 25 – (-15 x -1/5) =19 300 – (-15 x 18/5) = 354

نقل القيم إلى جدول

B . V	X_1	X_2	S_1	S_2	R . H . S
X_1	1	0	2/5	-1/5	3.6
X_2	0	1	-1/5	3/5	4.2
Z	0	0	6	19	354

بما أن قيم الصف Z لا تحتوي على قيم سالبة يمكن القول أننا وصلنا إلى الحل الأمثل هو:

نتحقق:

$$Z = 40(3.6) + 50(4.2) = 354$$

$$X_1 = 3.6$$

$$X_2 = 4.2$$

$$Z = 354$$

ملاحظة:

الحل موجود بطريقة الحل البياني وتم التوصل إلى نفس النتائج.

تمرين:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام Simplex Méthode

$$Max\ Z = 40X_1 + 36X_2$$

Subject to Constaints

$$5X_1 + 3X_2 \geq 45$$

$$X_1 \leq 8$$

$$X_2 \leq 10$$

Solution

بما أن دالة الهدف Max Z

فيجب أن تكون جميع القيود بإشارة أقل أو يساوي لذا يجب ضربها في (1-) ويصبح لدينا:

$$-5X_1 - 3X_2 \leq -45$$

$$X_1 \leq 8$$

$$X_2 \leq 10$$

2/ تحويل المتباينات إلى النموذج القياسي:

$$-5X_1 - 3X_2 = -45$$

$$X_1 = 8$$

$$X_2 = 10$$

3/ تحويل دالة الهدف إلى:

$$Z - 40X_1 - 36X_2 = 0$$

4/ إضافة المتغيرات الوهمية: S_1, S_2, S_3

$$Z - 40X_1 - 36X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

S/to

$$-5X_1 - 3X_2 + S_1 = -45$$

$$X_1 + S_2 = 8$$

$$X_2 + S_3 = 10$$

تحويل النموذج إلى الجدول الأساسي

B . V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R . H . S
S_1	-5	-3	1	0	0	-45
S_2	1	0	0	1	0	8
S_3	0	1	0	0	1	10
Z	-40	-36	0	0	0	0

المتغير الداخل X_1

المتغير الخارج S_2

$$\frac{-45}{-5} = 9 \ , \ \frac{8}{1} = \cancel{8 , \frac{10}{0}} = !$$

العنصر المحوري هو 1

الصف المحوري : X_1:8,0,0,8,0,8

قيم (Z, S_3, S_1)

S_1	S_3	Z
-5-(-5-8)=8	0-(0x8)=0	-40-(-40x8)=280
-3-(-5-0)=2	1-(0x0)=1	-36-(-40x0)=-36
1-(-5-0)=6	0-(0x0)=0	0-(-40x0)=0
0-(-5-8)=13	0-(0x8)=0	0-(-40x8)=320
0-(-5-0)=5	1-(0x0)=1	0-(-40x0)=0
45-(-5-8)=32	10-(0x8)=10	0-(-40x8)=320

نضع القيم في الجدول

B . V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R . H . S
S_1	8	2	6	13	5	32-
X_1	8	0	0	8	0	8
S_3	0	1	0	0	1	10
Z	280	-36	0	320	0	320

بما أن قيم الصف الاخر Z به قيم سالبة فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل ... نستمر في الحل

المتغير الداخل: X_2 (36-)

المتغير الخارج: S_3

$$\frac{-32}{-2} = -16\ ,\quad \frac{8}{0} = !\ ,\frac{10}{1} = 10$$

نأخذ أقل قيمة موجبة مع استثناء القيم الصفرية السالبة

العنصر المحور: 1

الصف المحوري:

X_2 : 0/1=0, 1/1=1, 0/1=0, 0/1=0, 1/1=1, 10/1=10

قيم Z, X_1, S_1

S_1	X_1	Z
8-(8x0)=8	8-(0x0)=8	280-(-36x0)=280
2-(8x1)=-6	0-(0x1)=0	-36-(-36x1)=0
6-(8x0)=6	0-(0x0)=0	0-(-36x1)=0
13-(8x0)=13	8-(0x0)=8	320-(-36x0)=320
5-(8x1)=-3	0-(0x1)=0	0-(-36x0)=36
-32-(8x10)=-112	8-(0x10)=8	320-(-36x10)=680

ننقل القيم إلى الجدول

B . V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R . H . S
S_1	8	-6	6	13	-3	112
X_2	0	1	0	0	1	10
X_1	8	0	0	8	0	8
Z	280	0	0	320	36	680

بما أن قيم الصف الاخر جميعها موجبة فيمكن القول بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل وهو:

$X_1=8$

$X_2=10$

$Z=680$

مثال أوجد الحل الأمثل باستخدام النموذج المقابل والطريقة البيانية

$$Min\ Z = X_1 + X_2$$

S/T

$$X_1 \geq 30 \ldots Y1$$

$$X_2 \geq 20 \ldots Y2$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 80 \ldots Y3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

النموذج المقابل

$$Max\ Z = 30Y_1 + 20Y_2 + 80Y_3$$

S/To

$$Y_1 + Y_3 \leq 1$$

$$Y_2 + 2Y_3 \leq 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

تحويل القيود من متباينات إلى نموذج قياسي.

$$Max\ W = 30Y_1 + 20Y_2 + 80Y_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$Max\ W - 30Y_1 - 20Y_2 - 80Y_3 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

تحويل النموذج إلى الجدول الأساسي

B . V	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	R . H . S
S_1	1	0	1	1	0	1
S_2	0	1	2	0	1	1
W	-30	-20	**-80**	0	0	0

المتغير الداخل: Y_3

المتغير الخارج: S_2

$$\frac{1}{1} = 1\ ,\frac{1}{2} = !\ 0.5$$

العنصر المحوري: 2

المعادلة المحورية:

Y_3 : 0, 1/2, 1, 0, 1/2, ½

قيم المتغيرات W , S_1

W	S_1
-30-(-80x0)=30-	1-(1x0)=1
-20-(-80x1/2)=20	0-(1x1/2)=1/2-
-80-(-80x1)=0	1-(1x1)=0
0-(-80x0)=0	1-(1x0)=1
0-(-80x1/2)=40	0-(1x1/2)=1/2-
0-(-80x1/2)=40	1-(1x1/2)=1/2

نقل القيم إلى الجدول

B . V	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	R . H . S
S_1	1	½	0	1	-½	½
Y_2	0	½	1	0	½	½
W	30	20	0	0	40	40

بما أن قيم 30- في السطر الأخير W فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل

المتغير الداخل Y_1

المتغير الخارج S1

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{2}\ ,\frac{1}{1} = 1$$

العنصر المحوري 1

دالة المحور

Y_1 : 1, -½, 0, 1, -½, ½

قيم W, Y_3

W	Y_3
-30-(-30*1)=5	0-(-*1)=0
20-(-30*1/2)=0	½-(0*1/2)=1/2
0-(-30*0)=0	1-(0*0)=1
0-(-30*1)=30	0-(0*1)=0
40-(-30*1/2)=25	½-(0*1)=1/2
40-(-30*1/2)=55	½-(0*1/2)=1/2

نقل القيم إلى الجدول

B . V	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	R . H . S
Y_1	1	-1/2	0	1	-1/2	½
Y_2	0	½	1	0	½	½
W	5	0	0	30	25	55

بما أن جميع قيم W موجبة فإننا وصلنا إلى الحل:

$X_1=30$

$X_2=25$

$W=55$

بعد حل هذا النموذج للطريقة البيانية **simplex** تم الوصول إلى الجدول النهائي التالي:

B.V	x_1	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	0	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	0	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
S_1	0	2	0	0	-2	1	0	20
z	1	4	0	0	1	2	1	1350

الحل الامثل هو: Z=1350

$x_1=0$

$x_2=100$

$x_3=230$

النموذج المقابل لهذا النموذج هو:

$$\text{Min } w=430y+460y+42y_3$$

S/T

$$y_1 + 3\, y_2 + y_3 \geq 3$$

$$2\, y_1 + 4y_3 \geq 2$$

$$y_1 + 2\, y_2 \geq 5$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

مثال: أوجد النموذج المقابل موضحا شكل منطقة الحلول في كل حالة:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2$$

S/T

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 25$$

الحل: ايجاد منطقة الحلول الممكنة للنموذج الأولي

أولا تحويل القيود على الشكل القياسي

$$X_1 + 3X_2 = 18$$

$$5X_1 + 3X_2 = 25$$

المعادلة رقم1:

$$if X_1 = 0 \quad X_2 = 6$$

$$if\ X_2 = 0 \quad X_1 = 18$$

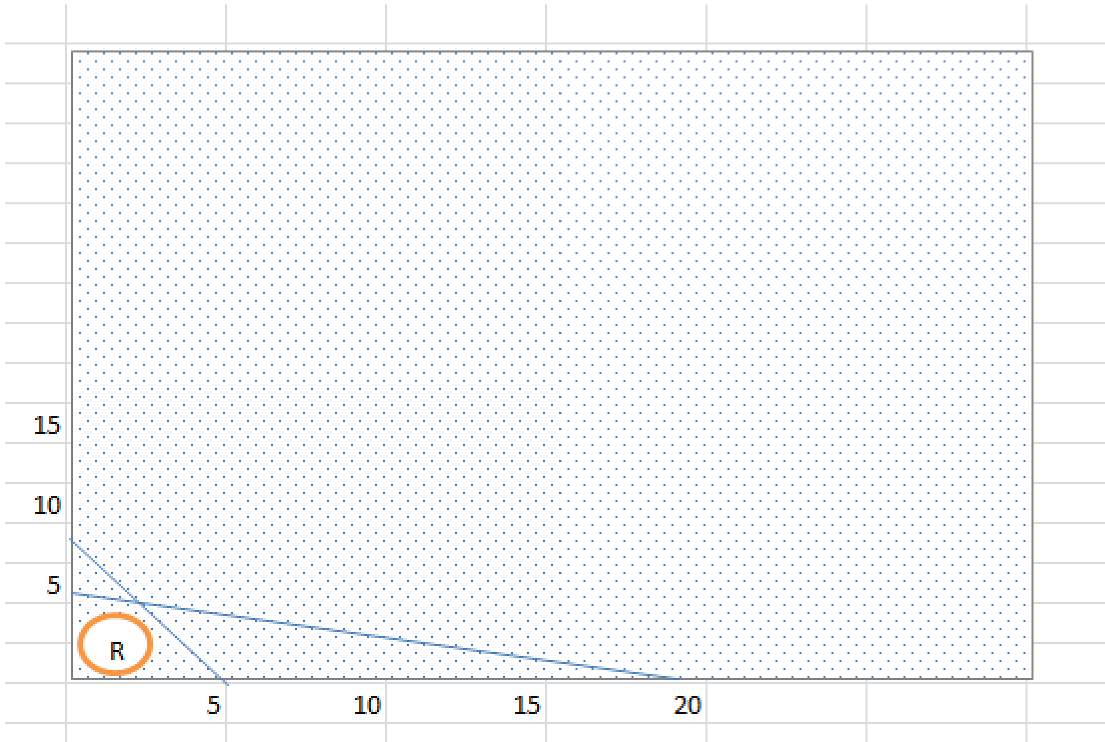
(0 . 6   (0 .5)

المعادلة رقم2:

if $X_1=0$ …… $X_2=25/6$

if $X_2=0$ …… $X_1=18$

(0. 25/3)   (5 . 0)



أوجد النموذج المقابل ومنطقة الحلول الممكنة

$$Min\ W = 18y_1 + 25y_2$$

s/c

$$y_1 + 5y_2 \geq 5$$

$$3y_1 + 3y_2 \geq 6$$

$$Y_1 \,.\, y_2 \geq 0$$

ايجاد منطقة الحلول الممكنة للنموذج الاول

المعادلة1

$f y_1 = 0$………….. $\quad$ $y_2 = 1$

$(0\ .1)$

$$f y_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad y_1 = 5$$

$$(5\ .0)$$

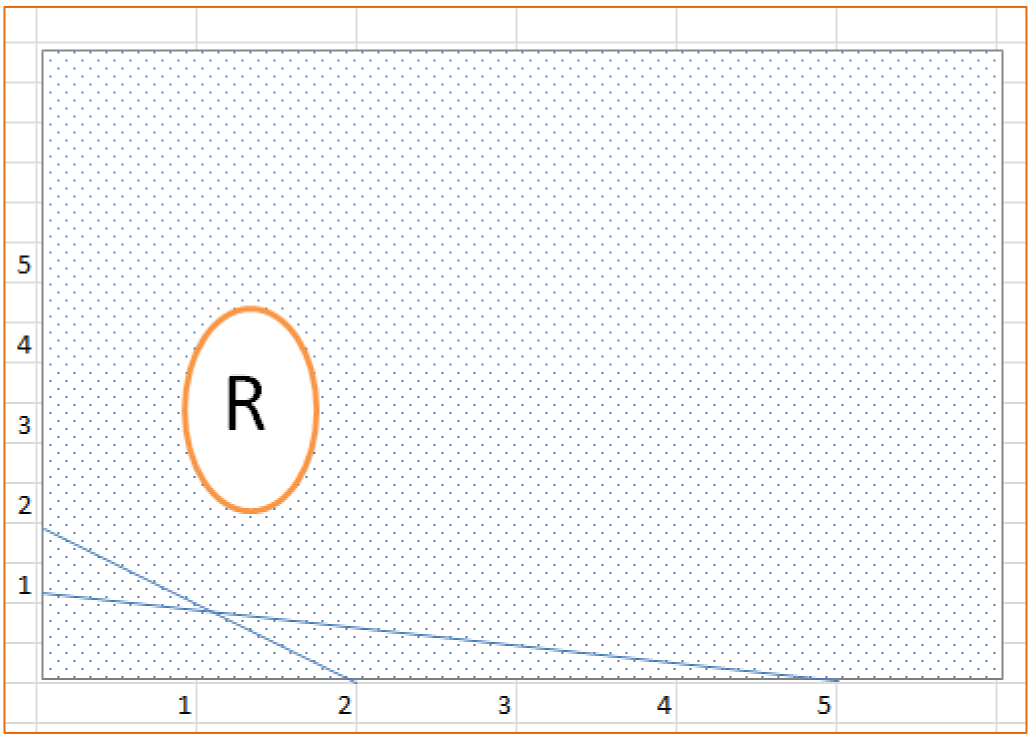
المعادلة 2

$$f y_1 = 0 \ldots\ldots \qquad y_2 = 2$$

$$(0\ .2)$$

$$f y_2 = 0 \ldots\ldots \qquad y_1 = 2$$

$$(2\ .0)$$



مثال: استخراج قيم النموذج المقابل من الحل المبدئ الأولي للنموذج الاصلي

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$S.t$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$$3X_1+2X_3 \leq 460$$

$$X_1+4X_2 \leq 420$$

$$X_1\, X_2\;\; X_3 \geq 0$$

بعد حل هذا المثال بطريقة *simplex* تم التوصل إلى الجدول التالي:

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20
z	4	0	0	1	2	0	1150

يتضح من الجدول أن الحل الامثل هو:

$$X_1=0$$

$$X_2=100$$

$$X_3=230$$

$$Z=1150$$

نستنتج أن قيم النموذج المقابل من الجدول الأولي وهي:

$$y_1=1$$

$$y_2=2$$

$$y_3=0$$

$$w=1150$$

مثال: استخراج قيم النموذج الاصلي من جدول النموذج المقابل

ليكن لدينا الجدول التالي وهو حل النموذج المقابل

المطلوب استخراج حلول النموذج الاصلي:

B.V	y_1	y_2	S_1	S_2	R.H.S
y_1	1	2	1	0	1
y_2	-3	1	0	1	2
w	4	3	21	11	300

الحل الامثل هو:

$y_1=1$

$y_2=2$

$w=300$

استخراج قيم النموذج الاصلي وهي:

$x_1=21$

$x_2=11$

$z=300$

مثال: أوجد الحل الامثل باستخدام النموذج المقابل والطريقة البيانية:

Min $Z= x_1+ x_2$

S/c $x_1 \geq 30$ ..... y_1

$x_2 \geq 20$ ..... y_2

$x_1+2 x_2 \geq 80$ ..... y_1

$x_1- x_2 \geq 0$

أولا: النموذج المقابل

Max $W =30 y_1+20y_2+80 y_3$

s/c

$y_1+y_3\leq 1$

$y_1+2y_3\leq 1$

$y_1. y_2. y_3\geq 0$

ثانيا: تحويل القيود الي متباينات

$y_1+ y_3=1$

$y_2+ 2y_3=1$

$y_1 . y_2 . y_3\geq 0$

اضافة المتغيرات الوهمية لدالة الهدف والقيود

$$\text{Max } w = 30y_1 + 20y_2 + 80y_3 + (0)s_1 + (0)s_2$$

$$y_1 + y_3 + s_1 = 1$$

$$y_2 + 2y_3 + s_2 = 1$$

تحويل النموذج الى الجدول الأساسي

B.V	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R.H.S
s_1	1	0	1	1	0	1
s_2	0	1	2	0	1	1
w	-30	-20	-80	0	0	0

المتغير الداخل: y_3

المتغير الخارج: s_2

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{1}{2} = 0.5$$

العنصر المحوري :2

المعادلة المحورية

$$y_3 : 0, \tfrac{1}{2}, 1, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}$$

قيم المتغيرات W

$$-30-(-80\times 0)=-30$$

$$-20-(-80\times\frac{1}{2}) = 20$$

$$-80-(-80\times1)=0$$

$$0-(-80\times0)=0$$

$$0-(-80\times{}^{1}/_{2}) = 40$$

$$0-(-80\times{}^{1}/_{2})=40$$

قيم المتغير s_1

$$1-(1\times0) =1$$

$$0-(1\times{}^{1}/_{2}) = -{}^{1}/_{2}$$

$$1-(1\times1)=0$$

$$1-(1\times0)=1$$

$$0-(1\times{}^{1}/_{2})=-{}^{1}/_{2}$$

$$1-(1\times{}^{1}/_{2})= {}^{1}/_{2}$$

نقل القيم الى الجدول

B.V	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R.H.S
s_1	1	${}^{1}/_{2}$-	0	1	$-{}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{2}$
y_3	0	${}^{1}/_{2}$	1	0	${}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{2}$
w	-30	20	0	0	40	40

بما أنه توجد قيم سالبة في الطر الاخير فإننا لم نصل إلى الحل الامثل

المتغير الداخل y_1

المتغير الخارج s_1

العنصر المحوري 01

دالة المحور

$$y_1 : 1, \frac{-1}{2}, 0, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$$

قيم المتغير W

-30-(-30×1)=5

$$20\text{-}(-30\times\frac{-1}{2}) = 0$$

0-(-30×0)=0

0-(-30×1)=30

$$40\text{-}(-30\times{}^{-1}/_{2}) = 25$$

$$40\text{-}(-30\times{}^{1}/_{2})=55$$

قيم المتغيرY

0-(0×1)=0

$${}^{1}/_{2}\text{-}(0\times{}^{-1}/_{2}) = {}^{1}/_{2}$$

1-(0×0)=1

0-(0×1)=0

$$\frac{1}{2}-(0\times-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}-(0\times\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

B.V	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R.H.S
y_1	1	$-1/2$	0	1	$-1/2$	$1/2$
y_3	0	$1/2$	1	0	$1/2$	$1/2$
w	5	0	0	30	25	55

كما أن جميع قيم الصف الاخير موجبة فإن الحل الامثل هو:

$$y_1=1/2,\ \ y_3=1/2$$

أما الحل الامثل للنموذج الاولي هو:

$x_1=30$

$x_2=25$

$z=55$

مشاكل النقل

تعد مشكلة النقل واحدة من التحديات الأساسية التي تواجه المؤسسات وحتى الدول، حيث ترتبط بالصعوبات المتعلقة بنقل المواد والبضائع بين مختلف المواقع سواء على المستوى المحلي أو الدولي وتتمثل هذه الصعوبات في ضعف البنية التحتية نقص وسائل النقل عوائق سياسة واجتماعية وثقافية.....الخ

كل هذا يؤثر بالسلب على التكلفة الإجمالية للمنتوج وبالتالي على سعر البيع، حيث يسعى أصحاب المؤسسات وحتى الدول الى تدنية التكاليف بما فيها تكاليف النقل الزائدة لأن هذه الأخير تدخل في تحديد السعر النهائي للمنتوج.

لحل هذه المشكلة طور أصحاب الإدارة الحديثة أساليب كمية ودقيقة تسمى بنماذج النقل حيث تهدف هذه الاخيرة إلى تقليل التكاليف الكلية.

صياغة نموذج النقل

- يفترض نموذج النقل الاتي:

1- وجود عدد من المراكز الإنتاجية مقدارها n وعدد من المراكز التسويقية أو

مراكز الطلب (الاستهلاك) مقدارها M

2- كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المركز التسويقي i الى مركز الطلب (الاستهلاك) j معلومة ومحددة وهي C_{ij} .

3- ان الكميات المنقولة من المراكز الإنتاجية إلى المراكز التسويقية محددة وهي

X_{ij}

4- تخفيض التكاليف الكلية الى اقل ما يمكن.

ولغرض تسهيل دراسة مشكلة النقل يمكن تمثيل جدول التكاليف للوحدات من المراكز الإنتاجية الى المراكز التسويقية كالاتي :

جدول التكاليف

المراكز التسويقية / المراكز الانتاجية	1	2	3	....	m	Supply العرض
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1m}	b_1
2	C_{21}	C_{11}	C_{11}	...	C_{2m}	b_2
3	C_{31}	C_{11}	C_{11}	...	C_{3m}	B_3
....	...	...	...	...	...	...
M	C_{n1}	C_{n1}	C_{n1}	...	C_{nm}	B_n
Demand الطلب	a_1	a_2	A_3	...	A_m	

أما جدول التوزيع فيمكن تمثيله كالاتي:

المراكز التسويقية / المراكز الانتاجية	1	2	3	....	m	Supply العرض
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	...	X_{1m}	b_1

2	X_{21}	X_{11}	X_{11}	…	X_{2m}	b_2
3	X_{31}	X_{11}	X_{11}	…	X_{3m}	B_3
….	…	…	…	…	…	…
M	X_{n1}	X_{n1}	X_{n1}	…	X_{nm}	B_n
Demand الطلب	a_1	a_2	A_3	…	A_m	

كما ويشترط نموذج النقل بشكله الأولي ضرورة المساواة بين عدد الوحدات فى المراكز الإنتاجية وعدد الوحدات المطلوبة فى المراكز التسويقية(مراكز الطلب) ليكون جدول النقل فى حالة التوازن. أي أن مجموع العرض = مجموع الطلب). أما إذا لم تتحقق هذه المساواة يتم إضافة صف أو عمود وهمي ليستوعب الفارق بين كمية العرض والطلب وتكون تكاليف النقل فيها صفر

اما النموذج الرياضي لمشكلة النقل فيمكن كتابته بالصورة الآتية -

$$\text{Min } Z=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+\ldots+C_{1m}X_{ij}+\ldots+C_{nm}X_{nm}$$

S/T

$$C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+\ldots+C_{1m}X_{1m}=b_1$$

$$C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+\ldots+C_{2m}X_{2m}=b_2$$

$$C_{31}X_{31}+C_{32}X_{32}+C_{33}X_{33}+\ldots+C_{3m}X_{3m}=b_3$$

$$C_{a1}X_{al}+C_{n2}X_{n2}+C_{n3}X_{n3}+\ldots+C_{nm}X_{nm}=b_n$$

$$C_{11}X_{11} + C_{21} X_{21} + C_{31}X_{31} + \dots + C_{n1}X_{n1}= a_1$$
$$C_{12} X_{12} + C_{22} X_{22} + C_{32}X_{32}+ \dots + C_{n2} X_{n2} = a_2$$
$$C_{13} X_{13} + C_{23} X_{23} + C_{33} X_{33} + \dots + C_{n3} X_{n3} = a_3$$
$$C_{1m} X_{1m} + C_{2m} X_{2m} + C_{3m}X_{3m}+ \dots + C_{nm} X_{nm} = a_m$$

$$X_1, X_2, X_3,\dots, X_{nm} \geq 0$$

من النموذج أعلاه والذي هو عبارة عن صيغة للبرمجة الخطية من الممكن حل النموذج باستخدام الطريقة المبسطة Simplex Method. ولكن في حالة كون عدد القيود والمتغيرات كثيرة هناك طرق أخرى تكون ابسط واسهل

طرق حل مشاكل النقل

طريقة الركن الشمالي

تعتبر من بين الطرق المستخدمة في منهج بحوث العمليات لحل مشكلة النقل، حيث يعتمد جوهر هذه الطريقة إلى الوصول إلى الحل المبدئي او ما سمي بالحل الأساسي وليس الحل الأمثل.

تعريفها: تعتمد هذه الطريقة على أن الانطلاقة تكون هي الزاوية الشمالية الغربية لجدول توزيع الكميات المعروضة على مراكز الطلب أو الأسواق.

خطواتها:

- يجب أن يكون العرض يساوي الطلب, إذا لم تتحقق المساواة يجب إضافة عمود أو سطر وهمي يحمل قيمة الفارق بين العرض والطلب بتكاليف مساوية للصفر.
- **لا بد من ترتيب الجدول كما يلي:**

العرض يكون مقابل لمصادر الإنتاج والطلب مقابل (الأسواق)

- الانطلاقة تكون من الخانة الأولى الغربية الشمالية.
- تخصيص للخلية أقل قيمة من العرض والطلب.
- تعديل قيمة العمود والصف بعد طرح قيمة الخلية من العمود والصف.
- الانتقال إلى العمود إذا كانت قيمة (الصف – الخلية) = 0
- الانتقال إلى الصف إذا كانت قيمة (العمود – الخلية) = 0

عيوبها :

- لا يوجد استفادة من تباين الأسعار
- الهدف هنا هو توزيع السلع على مراكز الطلب بغض النظر على التكلفة.

مثال 1: احسب التكلفة الاجمالية لنقل البضائع بطريقة الركن الشمالي

المصانع		الاسواق			العرض
		A	B	C	S
مراكز الانتاج	.I	4	4	2	25
	.II	2	3	3	55
	.III	4	6	2	60
	الطلب	20	70	50	140

المصانع		الاسواق			العرض
		A	B	C	S
مراكز الانتاج	.I	4 20	4 5	2	~~25~~ ~~5~~ 0
	.II	2	3 55	3	~~55~~ 0
	.III	4	6 10	2 50	~~60~~ ~~50~~ 0
الطلب		~~20~~ 0	~~70~~ ~~65~~ ~~10~~ 0	~~50~~ 0	140

$TC = (4)20 + 4(5) + 3(55) + 6(10) + 2(50)$ =**424**

مثال 2:

المصانع		الاسواق				العرض
		A	B	C	D	S
مراكز الانتاج	1	1 10	2	1	1	~~10~~ 0
	2	1 20	2 2	3	1	~~22~~ ~~2~~ 0
	3	3	1 2 8	3 10	2 12	~~30~~ ~~22~~ ~~12~~ 0
الطلب D		~~30~~ ~~20~~ 0	~~10~~ ~~8~~ 0	~~10~~ 0	~~12~~ 0	60

T.C= 1(10)+1(20)+2(2)+12(8)+3(10) 2+(12)= **184**

مثال 03:

المصانع		الاسواق					العرض
		A	B	C	D	E	S
مراكز الانتاج	1	1 15	1	1	3	2	15 0
	2	3 10	2	4	4	4	10 0
	3	3 20	1 10	3 10	2	2	40 20 10 0
الطلب D		30 20 0	10 0	10 0	10	5	70

TC=1(15)+3(20)+3(20)+1(10)+3(10) =175

		الاسواق					
		A	B	C	D	E	S
مراكز الانتاج	I.	1 10	1 15	1 20	3 5	2	50 40 25 5 0
	II.	3	2	4	4 20	4	20 0
	III.	6	2	3	5 5	2 25	30 25 0
	D	10 0	15 0	20 0	30 25 5 0	25 0	

$T.C = 1(10)+1(15)+1(20)+3(5)+4(20)+5(5)+\ 2(25) = 215$

		الاسواق			
		A	B	C	العرض
مراكز الانتاج	1	2 40	1 20	2	60 ~~20~~ 0
	2	2	3 20	5 10	30 ~~10~~ 0
	3	1	1	4 20	~~20~~ 0
الطلب		~~40~~ 0	~~40~~ ~~20~~ 0	~~30~~ ~~20~~ 0	110

T.C= 2(40)+ 1(20) +3(20)+ 5(10)+ 4(20)= 290

مثال:

الاسواق / مراكز الانتاج	A	B	C	D	E	F	Suplly
	1 500	1 400	4 100	3 100	2 400	1 100	~~1600~~ ~~1100~~ 700 ~~600~~ ~~500~~ 100 0
	1	2	2	3	2	4 300	300 0
	3	2	3	3	2	3 50	50 0
	1	4	4	4	4	1 50	50 0
D	~~500~~ 0	~~400~~ 0	~~100~~ 0	~~100~~ 0	~~400~~ 0	~~500~~ ~~400~~ ~~100~~ 50 0	2100

$T.C = 1(500) + 1(400) + 4(100) + 3(100) + 2(400) + 1(100) + 4(300) + 3(50) + 1(50) = 3900$

في حالة عدم تساوي الطلب مع العرض

إذا كان الطلب اكبر من العرض نظيف صف بقيمة الفارق بينهما بتكلفة تساوي الصفر

إذا كان العرض اكبر من الطلب نظيف عمود بقيمة الفارق بينهما بتكلفة تساوي الصفر

مثال

إذا كان الطلب اكبر من العرض

		الاسواق			
		A	B	C	Supply
مراكز الانتاج	I.	2	1	2	50
	II.	3	4	1	60
	III.	4	2	5	40
	الطلب	60	60	60	150 / 180

نلاحظ ان الطلب أكبر من العرض بمقدار 180-150=30 لذا يجب إضافة صف وهمي بمقدار الفارق وبتكلفة تساوي الصف

يصبح لدينا الجدول التالي

		الاسواق			
		A	B	C	Supply
مراكز الانتاج	I.	2 50	1	2	~~50~~ 0
	II.	3 10	4 50	1	~~60~~ ~~50~~ 0
	III.	4	2 10	5 30	~~40~~ ~~30~~ 0
	N .S	0 4	0	0 30	~~30~~ 0
	الطلب	~~60~~ ~~10~~ 0	~~60~~ ~~10~~ 0	~~60~~ ~~30~~ 0	180

Tc= 2(50) + 3(10) + 4(50) + 2(10) + 5(30) +0(30)= 550

في حالة العرض اكبر من الطلب هنا يجب إضافة عمود وهمي بقيمة الفارق بينهما

وهو 10

مثال

	A	B	C	Supply
1	2	1	2	60
2	3	4	n	60
3	4	2	5	60
D	65	55	50	180 170

	A	B	C	Ni	Supply
1	2 60	1	2	0	60 0
2	3 5	4 40	n 15	0	60 55 15 0
3	4	2	5 50	0 10	60 10 0
D	65 5 0	40 0	65 50 0	10 0	180

مثال2 :

$$Tc = 3(40) + 9(10) + 6(30) + 4(20) + 5(50) = 720$$

م.إ	A	B	C	SUPPLY
1	3 40	9 10	5	50 10 0
2	5	6 30	40 20	50 20 0
3	2	1	5 50	50 0
D	40 0	40 30 0	70 50 0	

2- نموذج النقل طريقة اقل تكلفة

هي من بين الطرق المستخدمة لتحديد الحل الأولي لمشكلة النقل والتي تهدف الى توزيع السلع بأقل تكلفة ممكنة .

خطواتها

- يجب أن يكون العرض يساوي الطلب, إذا لم تتحقق المساواة يجب إضافة عمود أو سطر وهمي يحمل قيمة الفارق بين العرض والطلب بتكاليف مساوية للصفر.
- **لا بد من ترتيب الجدول كما يلي:**

العرض يكون مقابل لمصادر الإنتاج والطلب مقابل (الأسواق)

- الانطلاقة تكون من الخلية ذات التكلفة أقل .
- تخصيص للخلية أقل قيمة من العرض والطلب.
- تكرار العملية بالبحث عن أقل تكلفة في الجدول وتخصيص الكميات حتى يتم تلبية جميع الطلبيات

عيوبها :

- قد يكون الحل ليس هو الحل الامثل بل تحتاج الى تحسين للوصول الى التكلفة الدنيا الحقيقية.

مثال 1

المعاني	الاسواق				s
1	10 100	11	12	16	100 0
2	9 50	11	8 150	15	200 50 0
3	12	8 400	14	15	400 0
4	10 150	13	9	7 150	300 150 0
D	250 150 0	400 0	150 0	150 0	

Tc= 9(50) + 8(150) + 8(400) + 10(150) + 7(150) = 8400

مثال2

المصنع	A	B	C	العرض
1	5	4	3 20	20 0
2	3 10	2 5	3 10	25 20 10 0
3	4	7	6 40	40 0
الطلب	10 0	50 0	70 50 40 0	

Tc= 3(20) + 3(10) + 2(5) + 3(10) + 6(40) = 370

مثال 3

ص	A	B	C	D	E	S
1	^{1}	^{6}	^{7}	^{5} 30	^{5} 20	50 20 0
2	^{5}	^{2} 20	^{4}	^{4} 10	^{8}	30 10 0
3	^{10}	^{1} 20	^{3}	^{2}	^{1}	20 0
4	^{3}	^{2}	^{3} 40	^{4}	^{6}	40 0
5	^{1} 20	^{2}	^{3}	^{7}	^{5} 40	60 40 0
D	20 0	40 20 0	40 0	40 30 0	60 20 0	200

$$Tc= 5(30) + 5(20) + 2(20) + 4(10) + 1(20) + 3(40) + 1(20) + 5(40) = 690$$

مثال 3: بطريقة أقل تكلفة (نفس المثال)

م.إ	A	B	C	SUPPLY
1	3 30	9	5 20	50 0 20
2	5	6 30	40 20	50 0
3	2 10	1	5 50	50 0 10
D	40 0 36	40 0	70 0 20	

$$Tc = 3(30) + 5(20) + 4(20) + 2(10) + 1(40) = 450$$

3- طريقة "فوجل"

تعتبر هذه الطريقة أكثر كفاءة وفعالية في حل مشكلة النقل بأقل تكلفة.

خطواتها

- يجب أن يكون العرض يساوي الطلب, إذا لم تتحقق المساواة يجب إضافة عمود أو سطر وهمي يحمل قيمة الفارق بين العرض والطلب بتكاليف مساوية للصفر.
- لابد أن يكون العرض مقابل لمصادر الإنتاج والطلب مقابل (الأسواق)
- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وعمود
- إختيار الصف أو العمود الذي يقابله أكبر فرق من بين الفروقات السابقة

- في الصف أو العمود المحدد يتم اختيار الخلية ذات أقل تكلفة حيث يتم تخصيص الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة.
- خذف العمود أو الصف بعد استيفاء كمية السلع.
- تكرار العملية وتخصيص الكميات حتى يتم تلبية جميع الطلبيات

مثال 1

مراكز الانتاج	الاسواق			العرض			
	A	B	C	SUPPLY			
1	5	4	3 20	20 0	1	1	
2	3	2 5	3 20	25 20 0	1	1	
3	4 10	7	6 30	40 30 0	2	1	
D	10 0	5 0	70 50 30 0				
	1	2	0				
		2	0				
			0				
			3				

Tc= 3(20) + 2(5) + 3(20) + 4(10) + 6(30) = 35

مراكز الانتاج	A	B	C	SUPPLY					
1	3 30	9	5 20	50 20 0	2	2	2	5	/
2	5	6	4 50	50 0	1	1	1	4	4
3	2 10	1 40	5	50 10 0	1	3			
D	40 30 0	40 0	70 50 0						
	1	5	1						
	1	/	1						
	2		1						
			1						
			4						

$Tc = 3(30) + 5(20) + 4(50) + 2(10) + 1(40) = 450$

الحل الأمثل

بعد الحصول على الحل الأساسي الأولي، يتم إستخدام أسايب أخرى لأختبار مثالية الحل من أجل الحصول على حل أفضل يعطي تكاليف كلية اقل وذلك باستخدام الطريقتين الاتيتين

طريقة المسار المتعرج

طريقة التوزيع المعدل

1- **طريقة المسار المتعرج**: (Stepping - Stone Method)

تتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأولي لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا نُقلت وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة.
فإذا وجدنا أن ملء خلية معينة غير مشغولة سيؤدي إلى تقليل التكاليف، يتم تعديل الحل الراهن وتستمر عملية تقييم كل جدول إلى أن نتوصل إلى أن إشغال أي خلية غير مشغولة لا يؤدي إلى تقليل في تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.

كما يجب ملاحظة أن أية مشكلة نقل تكون قابلة للحل الأمثل دون إضافات إذا تحقق الشرط الآتي، وهو أن عدد الخلايا المشغولة يجب أن يساوي دائماً مجموع عدد الصفوف وعدد الأعمدة ناقصاً واحد، أي أن:

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - 1

عدد الخلايا المشغولة = $(m + n - 1)$

ويتم تطبيق هذه الطريقة باتباع الخطوات الآتية:

1- يتم رسم مسار مغلق (Closed Path) لكل خلية غير مشغولة. يكون هذا المسار من مجموعة من قطع من المستقيمات الأفقية والعمودية. يبدأ من الخلية الغير المشغولة المراد اختبارها إلى خلية مليئة ثم يتم الوصول إلى الخلية الغير المشغولة نفسها بحيث يتم تجاوز خلايا غير مشغولة أو مملوءة بحيث نصل إلى خلية مماثلة.

2- يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها تتبعها علامة سالبة (-) للخلية التي تليها في المسار ثم علامة موجبة للخلية التي تليها وهكذا لجميع الخلايا التي يشكل منها المسار.

3- تحسب الكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية)، وذلك بجمع الكلفة للخلايا الواقعة على إشارة (+) وطرح الكلفة التي تحمل إشارة (-). فإذا كانت هذه النتيجة سالبة معنى ذلك أن إشغال هذه الخلية سيساهم في تخفيض التكاليف.

4- تكرر الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة، فإذا كانت الكلف غير المباشرة موجبة أو صفر فإن الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل .أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون الكلفة الغير مباشرة لها سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتخفيض التكاليف وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للكلفة الغير المباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل.

5- يتم إشغال الخلية الغير المشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

6- تكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا واختبار الخلايا الغير المشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الحصول على الحل الأمثل.

7- في حالة عدم تحقق شرط عدد الخلايا المشغولة($m + n - 1$) = ، في هذه الحالة نضيف إلى أحد الخلايا الغير المشغولة والتي تحتوي على أقل كلفة قيمة صفر بحيث لا يؤثر على الحل وتساعدنا في اختبار الخلايا الغير المشغولة.

أمثلة عن طريقة المسار المتعرج

ليكن لدينا الحل الأساسي لمشكلة النقل حيث تم التوصل إليه بطريقة الأقل تكلفة وذلك كما يلي:

	A	B	C	D	Supply
1	20 50	1 150	3	4	200
2	5 50	2	6 100	1 150	300
3	4	3	2 250	7	250
D	100	150	350	150	750

المطلوب

أوجد الحل الأمثل بطريقة المسارالمتعرج

$$Tc = 20(50) + 1(150) + 5(50) + 6(100) + 1(150) + 2(250)$$

$$= 2650$$

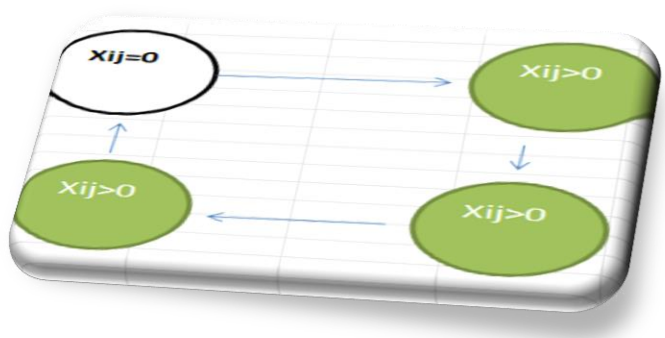
نلاحظ أن عدد الخلايا الاساسية $6=M+N-1$

المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير الأساسية

$X_j = 0 \quad , \quad X_j > 0$

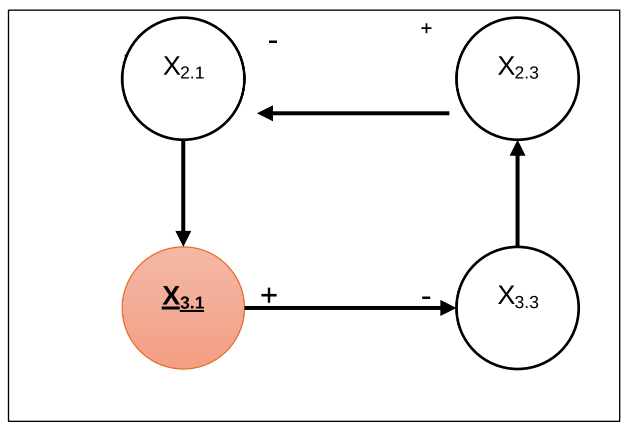
المتغيرات الغير الأساسية $X_j = 0$	المتغيرات الأساسية $X_j > 0$
$X_{1.3}$	$X_{1.1}$
$X_{1.4}$	$X_{1.2}$
$X_{2.2}$	$X_{2.1}$
$X_{3.1}$	$X_{2.3}$
$X_{3.2}$	$X_{2.4}$
$X_{3.4}$	$X_{3.3}$

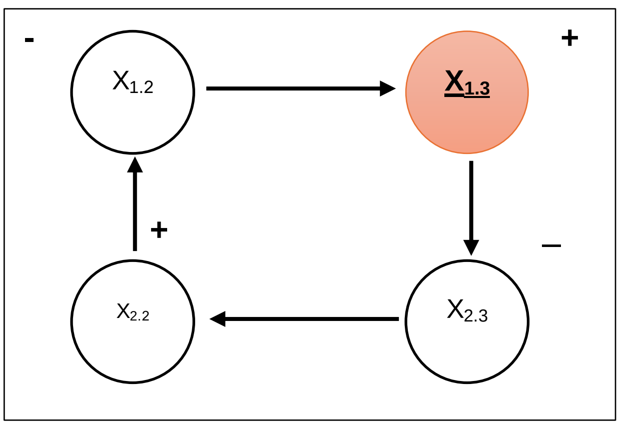
الخطوة التالية: تنظيم مسارات مغلقة للمتغيرات الغير الأساسية بشرط أن تكون كما هي موضحة في الشكل.

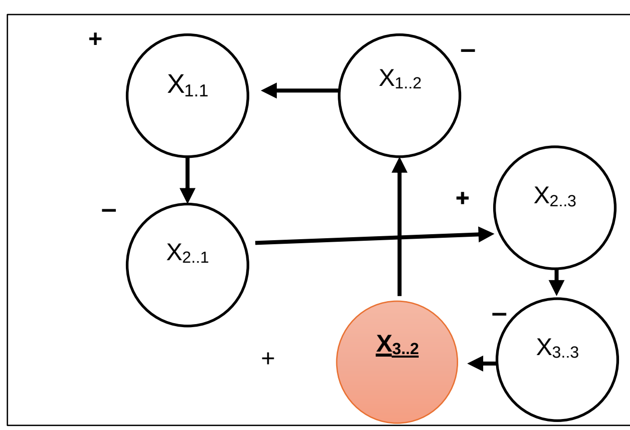


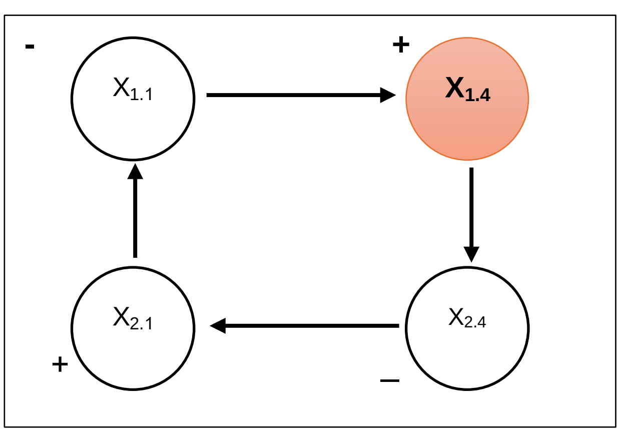
المساوات	المتغيرات الغير الأساسية
$X_{1.3} \rightarrow X_{2.3} \rightarrow X_{2.2} \rightarrow X_{1.2} \rightarrow X_{1.3}$	$X_{1.3}$
$X_{1.4} \rightarrow X_{1.1} \rightarrow X_{2.1} \rightarrow X_{2.4} \rightarrow X_{1.4}$	$X_{1.4}$
$X_{2.2} \rightarrow X_{2.1} \rightarrow X_{1.1} \rightarrow X_{1.2} \rightarrow X_{2.2}$	$X_{2.2}$
$X_{3.1} \rightarrow X_{3.3} \rightarrow X_{2.3} \rightarrow X_{2.1} \rightarrow X_{3.1}$	$X_{3.1}$
$X_{3.2} \rightarrow X_{1.2} \rightarrow X_{1.1} \rightarrow X_{2.1} \rightarrow X_{2.3} \rightarrow X_{3.3} \rightarrow X_{3.2}$	$X_{3.2}$
$X_{3.4} \rightarrow X_{2.4} \rightarrow X_{2.3} \rightarrow X_{3.3} \rightarrow X_{3.4}$	$X_{3.4}$

شكل المسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية

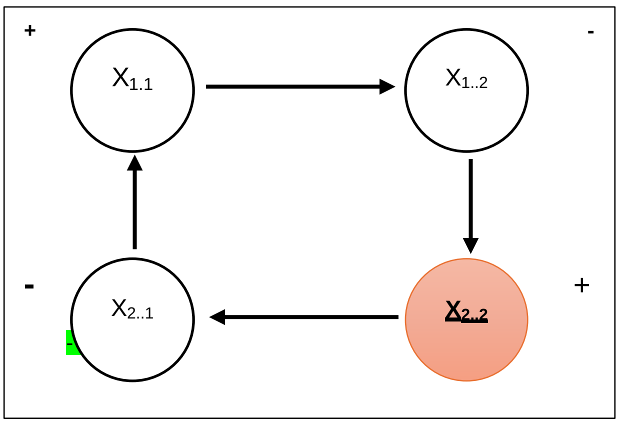


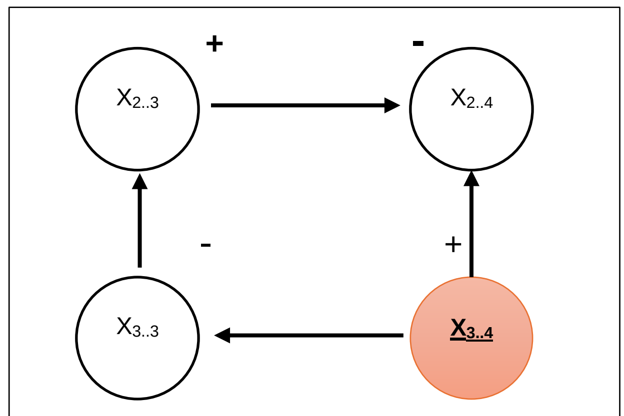






–





تعين العلامات الموجبة والسالبة بالتناوب

حساب التكلفة الغير المباشرة للمتغيرات الغير أساسية

$C_{(1,3)} = 3 - 20 + 5 - 6 = -18$ .... $X_{(1.3)}$

$C_{(1,4)} = 4 - 20 + 5 - 1 = -12$ .... $X_{(1.4)}$

$C_{(2,2)} = 2 - 1 + 20 - 5 = 16$ .... $X_{(2,2)}$

$C_{(3,1)} = 4 - 2 + 6 - 5 = 3$ .... $X_{(3,1)}$

$C_{(3,2)} = 3-1 + 20 - 5 + 6 - 2 = 21$ .... $X_{(3,2)}$

$C_{(3,4)} = 7 - 1 + 6 - 2 = 10$ .... $X_{(3,4)}$

نلاحظ من النتائج أعلاه أنه يوجد بعض القيم السالبة لذا يتوجب علينا أخذ المتغير الأكبر قيمة بإشارة سالبة ويصبح بين المتغيرات الأساسية وهو $X_{(1.3)}$

وهذا يعني أن المتغير $X_{(1.3)}$ يمكن أن يساهم في تخفيض التكاليف

بعد تحديد الخلية التي تحمل أقل تدفق ممكن في المربعات ذات القيم السالبة

وفي مثالنا $C_{(1,3)} = -18$ وهو أقل قيمة سالبة

$$Min (X^-) = Min (-100, -50) = 50$$

إذن ستضاف 50 إلى خلايا ذات إشارة موجبة لمسار C (1,3) و هذه الخلايا هي,X(1,3)

X(2,1) وستطرح 50 من الخلايا التي تحمل إشارة سالبة لنفس المسار C (1,3) و هذى الخلايا

$X_{(2,3)}, X_{(1,1)}$

ويصبح الجدول الجديد كما يلي:

	A	B	C	D	Supply
1	20	1 150	3 50	4	200
2	5 100	2	6 50	1 150	300
3	4	3	2 250	7	250
D	100	150	350	150	750

يلاحظ أن كلفة النقل وفق هذا الحل هي:

$$Tc = 1(150) + 3(50) + 5(100) + 6(50) + 1(150) + 2(250)Z_1 = Z_0=1750$$

أي أن هذا الحل أفضل من سابقه

سؤال: هل هذا الحل هو الحل الأمثل أم يمكن تحسينه؟

للإجابة عن هذا السؤال:

نحدد المتغيرات الأساسية والغير الأساسية فنجد:

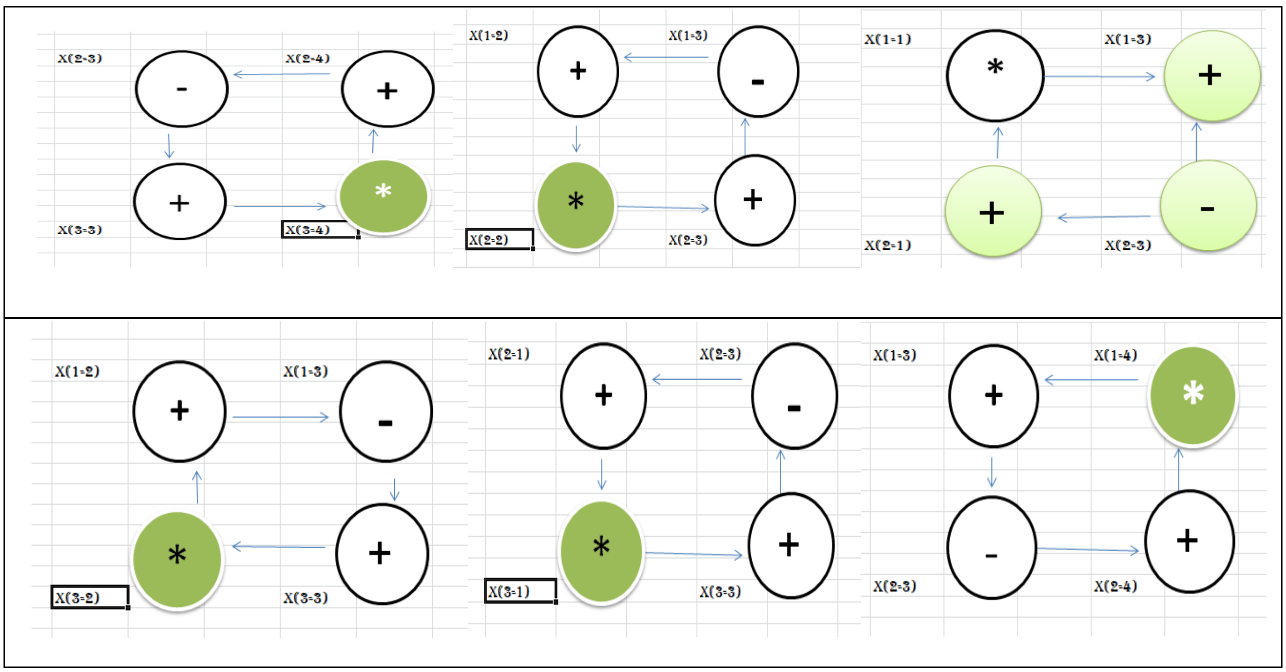
المتغيرات الأساسية:

$$X_{(1.2)},\ X_{(1.3)},\ X_{(2.1)},\ X_{(2.3)},\ X_{(2.4)}$$

المتغيرات الغير الأساسية:

$$X_{(1.1)},\ X_{(1.4)},\ X_{(2.2)},\ X_{(3.1)},\ X_{(3.2)},\ X_{(3.4)}$$

تشكيل المسارات المغلقة للمتغيرات الغير أساسية



حساب التغير في التكلفة للمتغيرات الغير الأساسية:

الخلية غ أساسية X_{ij}	التغير في التكلفة C_{ij}
$X_{(1,1)}$	$C_{1.1} = 20 - 5 + 2 - 3 = 17$
$X_{(1,4)}$	$C_{1.4} = = 4 - 1 + 2 - 1 = 5$
$X_{(2,2)}$	$C_{2.2} = = 2 - 6 + 3 - 1 = -2$
$X_{(3,1)}$	$C_{3.1} = 4 - 5 + 6 - 2 = 3$
$X_{(3,2)}$	$C_{3.2} = 3 - 1 + 3 - 2 = 3$
$X_{(3,4)}$	$C_{3.4} = 7 - 1 + 6 - 2 = 10$

نلاحظ من هذه النتائج أنه يوجد قيم سالبة وعليه يمكن تحسين الحل

بما أن $X_{(2.2)}=-2$ وهو أكبر قيمة بإشارة سالبة أي المتغير الداخل هو $X_{(2.2)}$ لأنه يحمل أكبر قيمة بإشارة سالبة ويمكن أن يساهم في تحسين الحل .

تحديد أقل قيمة سالبة في هذا المسار $X_{(2.2)}$

$$\text{Min}\ (X_{2.2}) = \text{Min}(50\ .150) = 50$$

أي سوف نضيف 50 لجميع القيم التي تحمل إشارة موجبة في هذا المسار

ونطرح 50 من جميع القيم التي تحمل إشارة سالبة

وعليه يصبح لدينا الجدول الجديد كما يلي:

	A	B	C	D	Supply
1	20	1 100	3 100	4	200
2	5 100	2 50	6	1 150	300
3	4	3	2 250	7	250
D	100	150	350	150	750

يلاحظ أن تكلفة النقل وفق هذا الحل هي :

$$T.C = 1(100) + 3(100) + 5(100) + 2(50) + 2(250)$$

$$Z_2 = 1500 < Z_1$$

أي أن هذا الحل هو الحل أفضل من سابقه

سؤال: هل هذا هو الحل الأمثل أم يمكن تحسينه ؟

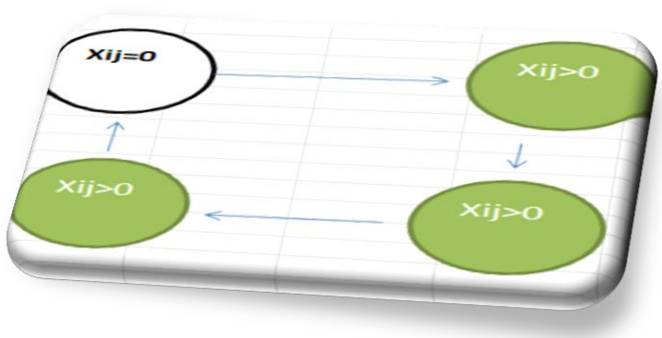
للإجابة على هذا السؤال لابد من تحديد المتغيرات الأساسية والغير الأساسية

المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير الأساسية

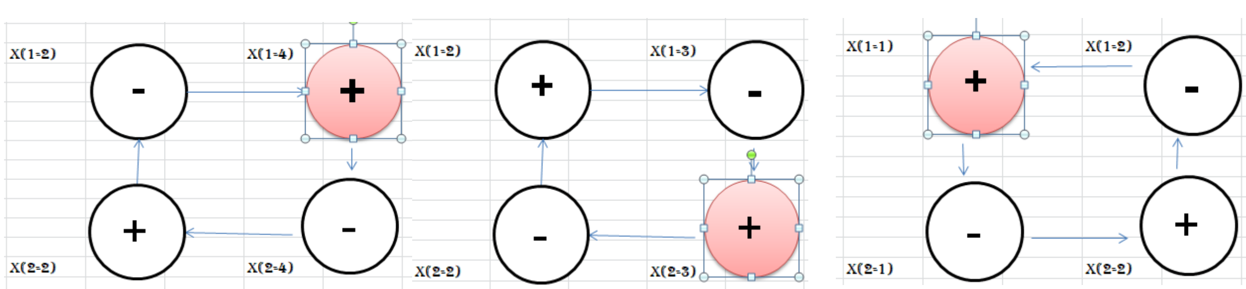
$X_j = 0 \quad , \quad X_j > 0$

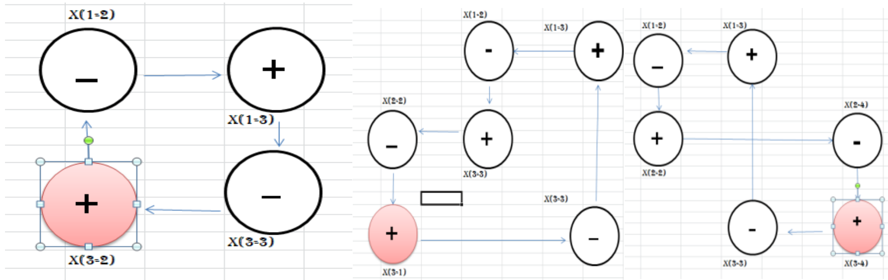
المتغيرات الأساسية $X_j > 0$	المتغيرات الغير الأساسية $X_j = 0$
$X_{1.2}$	$X_{1.1}$
$X_{1.3}$	$X_{1.4}$
$X_{2.1}$	$X_{2.3}$
$X_{2.2}$	$X_{3.1}$
$X_{2.4}$	$X_{3.2}$
$X_{3.3}$	$X_{3.4}$

الخطوة التالية: تنظيم مسارات مغلقة للمتغيرات الغير الأساسية بشرط أن تكون كما هي موضحة في الشكل.



تشكيل المسارات المغلقة للمتغيرات الغير أساسية





حساب التغير في التكلفة للمتغيرات الغير أساسية

التغير في التكلفة C_{ij}	الخلية غ أساسية X_{ij}
$C_{1.1} = 20 - 5 + 2 - 1 = 16$	$X_{(1,1)}$
$C_{1.4} = = 4 - 1 + 2 - 1 = 5$	$X_{(1,4)}$
$C_{2.3} = = 6 - 2 + 1 - 3 = 2$	$X_{(2,3)}$
$C_{3.2} = 3 - 1 + 3 - 2 = 3$	$X_{(3,2)}$
$C_{3.1} = 4 - 2 + 3 - 1 + 2 - 5 = 1$	$X_{(3,1)}$
$C_{3.4} = 7 - 2 + 3 - 1 + 2 - 1 = 8$	$X_{(3,4)}$

بما أن جميع القيم موجبة يمكن القول أن الحل الذي تحصلنا عليه $Z= 1500$ هو الحل الأمثل لإقل تكلفة نقل ولا يمكن تحسينه.

2- طريقة التوزيع المعدل

تُعد طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method - MODI) من الطرائق المستخدمة لتحسين الحلول الأولية في مسائل النقل بغرض الوصول إلى الحل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة إجمالية ممكنة لنقل البضائع من مصادر العرض إلى وجهات الطلب.

أهمية الطريقة:

بعد إيجاد حل أولي ممكن لمسألة النقل، نحتاج للتحقق مما إذا كان هذا الحل هو الأمثل أم لا. وهنا تأتي أهمية طريقة التوزيع المعدل التي تساعد في تحسين الحل خطوة بخطوة بالاعتماد على التكاليف الفرعية المحسوبة.

مثال :من الجدول الأولي الآتي والذي تم الحصول عليه بطريقة الركن الشمالي الغربي، أوجد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل

		الأسواق			S
		A	B	C	
مراكز الانتاج	1	7 18	3 4	10	22
	2	4	6 18	0 6	24
	3	5	8	9 14	14
D		18	22	20	60

8- الحل :

أولا: إجمالي التكلفة

$$T.C= 7(18)+3(4)+6(18)+0(6)+9(14)=372$$

ثانيا: تسمية الأعمدة والأسطر

		V_1	V_2	V_3	S
		A	B	C	
	U_1	7 18	3 4	10	22
	U_2	4	6 18	0 6	24
	U_3	5	8	9 14	14
D		18	22	20	60

ثالثا: تشكيل المعادلات بالخلايا المملوءة (المشغولة)

$U_1+V_1 = 7$

$U_2+V_2=3$

$U_2+V_2=6$

$U_2+V_3=0$

$U_3+V_3=9$

رابعا:

حل المعادلات بإفتراض $U_1=0$

- $U_1 + V_1 = 7$ .... → $0 + V_1 = 7$............................ → $V_1 = 7$
- $U_1 + V_2 = 3$ .... → $0 + V_2 = 3$ .... → $V_2 = 3$
- $U_2+ V_2 = 6$ .... → $U_2+ 3 = 6$ .... → $U_2 = 6 - 3 = 3$
- 4 … $U_2 + V_3 = 0$ ...... → $3 + V_3 = 0$ .... → $V_3 = -3$
- $U_3 + V_3 = 9$ .... → $U_3 + (-3) = 9$ .... → $U_3 = 9 + 3 = 12$

رابعا: تقييم الخلايا الفارغة (الغير مشغولة)

4-1- تسمية الخلية الفارغة وتقييمها $(C_i - U_i - V_i)$

$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

X (1,3) = 10 – 0 + 3 = 13

X (2,1) = 4 – 3 – 7 = - 8

X (3,1) = 5 – 12 – 7 = - 14

X (3,2) = 8 – 12 – 3 = -7

نلاحظ أن بعض القيم سالبة وبالتالي يمكن القول أننا لم نصل إلى الحل الأمثل.

انطلاقا من الخلية X(3,1) وباعتبارها أكبر قيمة بإشارة سالبة (-14) يتم رسم مسار مغلق لتحديد عدد الوحدات الواجب نقلها.

نلاحظ أن القيم السالبة في المخطط هي (-18، -18, -14)

وبالتالي نأخذ أقل قيمة وهي (-14)

تضاف إلى كل خلية تحمل إشارة (+)

وتطرح من كل خلية تحمل إشارة (-)

وبالتالي يكون لدينا

$$X(3,1) = 0 + 14 = 14$$

$$X(1,1) = 18 - 14 = 4$$

$$X(1,2) = 4 + 14 = 18$$

$$X\,(2,2) = 18 - 14 = 4$$

$$X\,(2,3) = 6 + 14 = 20$$

$$X\,(3,3) = 14 - 14 = 0$$

	A	B	C	Supply
.i	7 4	3 18	10	22
.ii	4	6 4	0 20	24
.iii	5 14	8	9	15
D	18	22	20	60/60

نتأكد أن الطلب يساوي العرض:

$$22 + 24 + 15 = 18 + 22 + 20$$

نحسب التكلفة الجديدة:

$$Tc = 7(4) + 3(18) + 6(4) + 0(20) + 5(14) = 176$$

هل هذا هو الحل الأمثل؟

نقوم بنفس الخطوات السابقة وهي:

أولا: عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + الأعمدة – 1

$$S = 3 + 3 - 1$$

$$= 5$$

الخطوة الثانية: تسمية الأعمدة والأسطر

		V_1	V_2	V_3	
		A	B	C	S
U_1	1	$^{7}\,4$	$^{3}\,18$	^{10}	22
U_2	2	^{4}	$^{6}\,4$	$^{0}\,20$	24
U_3	3	$^{5}\,14$	^{8}	^{9}	15
	D	18	22	20	

تشكيل المعادلات:

$$U_1 + V_1 = 7$$

$$U_1 + V_2 = 3$$

$$U_2 + V_2 = 6$$

$$U_2 + V_3 = 0$$

$$U_3 + V_3 = 5$$

حل المعادلات

بافتراض $U_1=0$ نجد:

$$0 + V_1 = 7 \rightarrow V_1 = 7$$

$$0 + V_2 = 3 \rightarrow V_2 = 3$$

$$U_2 + 3 = 6 \rightarrow U_2 = 3$$

$$3 + V_3 = 0 \rightarrow V_3 = -3$$

$$U_3 + 7 = 5 \rightarrow U_3 = 5 - 7 = -2$$

$V_1 = 7$ $V_2 = 3$ $V_3 = -3$

		A	B	C	S
	1	^{7} 4	^{3} 18	^{10}	22
$U_1 = 0$	2	^{4}	^{6} 4	^{0} 20	24
$U_2 = 3$	3	^{5} 14	^{8}	^{9}	15
$U_3 = -2$	D	18	22	20	

تقييم الخلايا الغير مشغولة $\overline{C}_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

$$X(1,3) : \overline{C}_{ij} = 10 - (0 + (-3)) = 10 - (-3) = 13$$

$$X(2,1) : \overline{C}_{ij} = 4 - (3 + 7) = 4 - 10 = 6-$$

$$X(3,2) : \overline{C}_{ij} = 8 - (-2 + 3) = 8 - (1) = 7$$

$$X(3,3) : \overline{C}_{ij} = 9 - (-2 + (-3)) = 9 - (-5) = 14$$

بما أن جميع القيم أكبر أو تساوي الصفر فإنه يمكن القول أن الحل السابق هو الحل الأمثل ولا يمكن تحسينه هو:

Tc = 176

مثال 2: لدينا الحل الأولي المستخرج باستخدام طريقة الركن الشمالي

	A	B	C	D	Supply
1	10 5	0 10	20	11	15
2	12	7 5	9 5	20 5	25
3	0	14	16	18 5	5
D	5	15	15	10	45/45

السؤال أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة التوزيع المعادل

أولا: نتأكد من أن العرض مساو ي للطلب

$$15 + 25 + 5 = 5 + 15 + 15 = 45$$

ثانيا: نتأكد من شرط عدد الخلايا المشغولة يساوي عدد الصفوف + الأعمدة – 1

$$6 = 4 + 3 - 1$$

الشرط محقق

ثالثا: تسمية الأعمدة والأسطر

V_1 V_2 V_3 V_4

		A	B	C	D	Supply
U_1	1	^{10} 5	^{0} 10	^{20}	^{11}	15
U_2	2	^{12}	^{7} 5	^{9} 5	^{20} 5	25
U_3	3	^{0}	^{14}	^{16}	^{18} 5	5
	D	5	15	15	10	45

$$Tc = 320$$

تشكيل المعادلات:

$$U_1 + V_1 = 10$$

$$U_1 + V_2 = 0$$

$$U_2 + V_2 = 7$$

$$U_2 + V_3 = 9$$

$$U_2 + V_4 = 20$$

$$U_3 + V_4 = 18$$

حل المعادلات بافتراض $U_1=0$ نجد:

$$0 + V_1 = 10 \rightarrow V_1 = 10$$

$$0 + V_2 = 3 \rightarrow V_2 = 3$$

$$U_2 + 0 = 7 \rightarrow U_2 = 7$$

$$7 + V_3 = 9 \rightarrow V_3 = 2$$

$$7 + V_4 = 20 \rightarrow V_4 = 13$$

$$U_3 + 13 = 18 \rightarrow U_3 = 5$$

تقييم الخلايا الغير مشغولة

$$X(1,3) : \bar{C}_{1.3} = 20 - (0 + 2) = 18$$

$$X(1,4) : \bar{C}_{1.4} = 11 - (0 + 13) = -2$$

$$X(2,1) : \bar{C}_{2.1} = 12 - (7 + 10) = -5$$

$$X(3,1) : \bar{C}_{3.1} = 0 - (5 + 10) = -15$$

$$X(3,2) : \bar{C}_{3.2} = 14 - (5 + 10) = -1$$

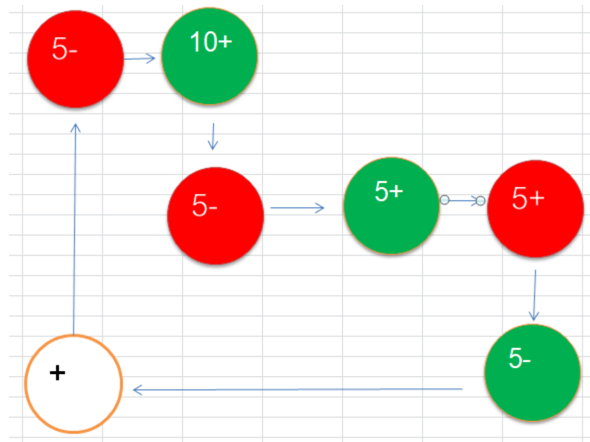
$$X(3,3) : \bar{C}_{3.3} = 16 - (5 + 2) = 9$$

بما أنه يوجد مجموعة من القيم سالبة فإنه يمكن القول أنه يمكن تحسيين الحل الأولي

نلاحظ أن الخلية X (3,1) سوف تؤدي إلى تحسين التكلفة بمقدار 15 وحدات نقدية لكل وحدة تنقل عبرها

وبإعتبار أن الخلية X (3,1) تحمل أكبر قيمة بإشارة سالبة (15-) يتم رسم مسار مغلق لتحديد عدد الوحدات الواجب نقلها

نلاحظ أن القيم السالبة هي (5-, 5-, 5-)



بما أن القيم متساوية نأخذ رقم 5 ونطرحه من الخلية التي تحمل إشارة سالبة وتضاف إلى الخلية التي تحمل إشارة موجبة.

وبالتالي يكون لدينا:

$$X\ (3,1) = 0 + 5 = 5$$

$$X\ (1,1) = 5 - 5 = 0$$

$$X\ (1,2) = 10 + 5 = 15$$

$$X\ (2,2) = 5 - 5 = 0$$

$$X\ (2,3) = 5 + 5 = 10$$

$$X\ (2,4) = 5 - 5 = 0$$

$$X\ (3,4) = 5 + 5 = 10$$

بعد التوزيع الجديد يعدل الجدول كما يلي:

	A	B	C	D	Supply
1	^{10}	^{0} 15	^{20}	^{11}	15
2	^{12}	^{7}	^{9} 10	^{20}	10
3	^{0} 5	^{14}	^{16}	^{18} 10	15
D	5	15	10	10	40/40

نتأكد من أن الطلب يساوي العرض

$$Tc = 270$$

هل هذا هو الحل الأمثل؟

أولا: نسمي الأسطر والأعمدة مع تشكيل المعادلات

V_1 V_2 V_3 V_4

		A	B	C	D	Supply
U_1	1	^{10}	^{0} 15	^{20}	^{11}	15
U_2	2	^{12}	^{7}	^{9} 10	^{20}	10
U_3	3	^{0} 5	^{14}	^{16}	^{18} 10	15
	D	5	15	10	10	40/40

نتأكد من أن عدد الخلايا المشغولة يساوي $M + N - 1$

$$4 + 3 - 1 = M + N - 1 = 6$$

عدد الخلايا المشغولة يساوي 4

عدد الخلايا المشغولة لا يساوي $M + N - 1$

لابد من إضافة خليتين وهميتين ذات القيم الأقل من حيث التكلفة بحصص مساوية للصفر

$X(1,1)$, $X(2,2)$

يصبح لدينا الجدول التالي:

$V_1 = 10 \quad V_2 = 0 \quad V_3 = 9 \quad V_4 = -8$

	A	B	C	D	
1	10	0 15	20	11	
2	12	7 0^+	9 10	20	
3	0 5	14	16	18 10	

$0 = U_1$

$0 = U_2$

$-10 = U_3$

بإضافة خليتين وهميتين يتحقق الشرط

$$m + n - 1 = 6$$

تشكيل المعادلات:

$$U_1 + V_1 = 10$$

$$U_1 + V_2 = 0$$

$$U_2 + V_2 = 0$$

$$U_2 + V_3 = 9$$

$$U_3 + V_1 = 0$$

$$U_3 + V_4 = 18$$

بافتراض $U_1=0$

$$0 + V_1 = 0 \rightarrow V_1 = 10$$

$$0 + V_2 = 0 \rightarrow V_2 = 0$$

$$U_2 + 0 = 0 \rightarrow U_2 = 0$$

$$0 + V_3 = 9 \rightarrow V_3 = 9$$

$$U_3 + 10 = 0 \rightarrow U_3 = -10$$

$$-10 + V_4 = 18 \rightarrow V_4 = 18 + 10 = -8$$

تقييم الخلايا الغير مشغولة (الغير الأساسية)

$$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

$$\overline{C}_{1.3} = 20 - (0 + 9) = 11$$

$$\overline{C}_{1.4} = 11 - (0 - 8) = 19$$

$$\overline{C}_{2.1} = 12 - (0 + 10) = 2$$

$$\overline{C}_{2.4} = 20 - (0 - 8) = 28$$

$$\overline{C}_{3.2} = 14 - (-10 + 0) = 24$$

$$\overline{C}_{3.3} = 16 - (-10 + 9) = 16 + 10 - 9 = 17$$

بما أن جميع القيم موجبة فيمكننا القول أنه لا يمكن تحسين الحل، أما الحل الأخير Z = 270 هو الحل الأمثل

قائمة المراجع

- الاساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية/ كاسر المنصور/ دار الحامد للنشر والتوزيع
- الاساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية / أكرم محمد عرفان المهندي/ دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع
- الاساليب الكمية في العلوم الادارية / محمد دياس الحميد/دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع
- الاساليب الكمية في التسويق / محمود جاسم الصميدعي/دار المناهج للنشر والتوزيع/عمان
- **مدخل الاساليب الكمية في التسويق / مؤيد الفضل/ دار المسيرة للنشر والتوزيع /الاردن
- **بحوث العمليات/ محمد اسماعيل بلال/دار الجامعية الجديدة/2005
- **بحوث العمليات** / محمد راتول/ ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر
- **بحوث العمليات** / لحسن عبد الله باشيوة/دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع
- **بحوث العمليات** / شفيق العتوم/ دار المناهج للنشر والتوزيع/الاردن
-
- **بحوث العمليات** / حسين غنيم/ جامعة القاهرة-التعلم المفتوح/الجزء 01
- **بحوث العمليات** / محمد سالم الصفدي/دار وائل للنشر والتوزيع/الاردن
- **بحوث العمليات** / عبد اسماعيل الصفار/ دار المناهج للنشر والتوزيع/الاردن
- **بحوث العمليات** / أحمد الصفار/ دار المناهج للنشر والتوزيع/الاردن
- **بحوث العمليات** / حسن علي مشرقي
- **بحوث العمليات ج 1** / فانته اليمين/ايتراك للطباعة والنشر والتوزيع / القاهرة
- **بحوث العمليات والإحصاء** / محمود علي عجوز/دار الفكر الجماعي/ الاسكندرية

- **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية** / مكيد علي/ ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر
- **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال** / محمود العبيدي/مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع/عمان
- **بحوث العمليات ج 1** / حسين غنيم/مركز جامعة القاهرة
- **بحوث العمليات ج 2** / حسين غنيم// جامعة القاهرة-التعلم المفتوح/الجزء 02
- **بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الانتاج** / مُحَمَّد صالح الحناوي/ الدار الجامعية للطباعة والنشر والتوزيع/القاهرة
- **بحوث العمليات في العلوم التجارية** / علي العلاونة/مركز يزيد للنشر/الاردن